Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2002-2003
CS 103 – Analyse I — Semestre 2

Devoir 4

A rendre le 21/03/03

Dans ce devoir f désigne l'application définie de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(p,q) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q^2}$$

et $E = \operatorname{Im} f$, c'est-à-dire

$$E = \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q^2} \mid (p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \right\}$$

Exercice I

1. Montrer que $\overline{E} \subset [0;2]$

2. Montrer que 0 est point d'accumulation de E.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\frac{1}{n}$ est point d'accumulation de E.

Exercice II

1. Soit $x \in E$, montrer qu'il existe $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $x = f(p,q)$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in E$ tel que $x \geq \frac{1}{n}$. Avec les notations de la question précédente montrer que

$$p \leq n \quad \text{ou} \quad q \leq \sqrt{n(n+1)}$$

3. Soit $x \in]1;2]$. Montrer que $E \cap]x,2]$ est un ensemble fini.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, et $x \in]\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}[$. Montrer que $E \cap]x, \frac{1}{n-1}]$ est un ensemble fini.

Exercice III

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que E n'admet pas de point d'accumulation dans $]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$.

2. Montrer que

$$\overline{E} = E \cup \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$