Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

Année 2002-2003
Semestre 2

Devoir 3

Correction

Exercice I

1. Le réel $e \in I$ est un équilibre de la relation de récurrence si et seulement si

$$e = e - \frac{g(e)}{g'(e)} \text{ et } e \in I$$

Comme g' ne s'annule pas sur I, cette équation équivaut à $g(e) = 0$ avec $e \in I$. Cette dernière équation a une solution unique α, en conséquence la relation de récurrence a un unique équilibre α sur I.

2. Soit $f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}$. Une condition suffisant de stabilité locale est $|f'(x)| < 1$. Or

$$f'(x) = 1 - \frac{g'(x)g'(x) - g(x)g''(x)}{g'(x)^2} = \frac{g(x)g''(x)}{g'(x)^2}$$

on obtient donc la condition suffisante suivante :

$$\left|\frac{g(x)g''(x)}{g'(x)^2}\right| < 1 \tag{1}$$

Cette condition est toujours satisfaite en α puisque $g(\alpha) = 0$.

3. Considérons (par exemple)

$$\begin{cases} u_0 = \frac{a+b}{2} \\ u_{n+1} = u_n - \frac{g(u_n)}{g'(u_n)} \end{cases}$$

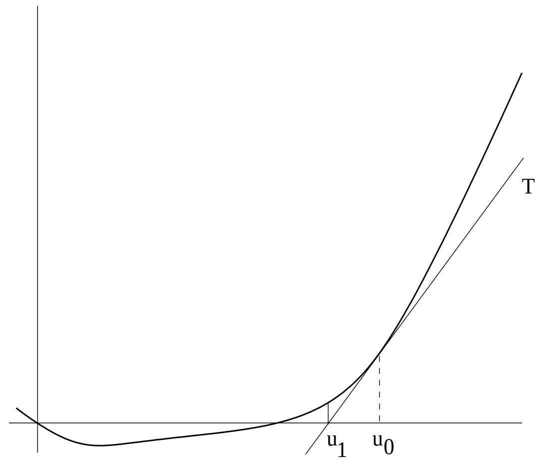
La question précédente permet d'affirmer que $\lim u_n = \alpha$.

4. Proposons l'algorithme suivant

- $x \leftarrow \frac{a+b}{2}$
- Tant que $g(x-\varepsilon)g(x+\varepsilon) > 0$ faire $x \leftarrow x - \frac{g(x)}{g'(x)}$
- Rendre le résulat : x

Le test $g(x-\varepsilon)g(x+\varepsilon) > 0$ a pour but de poursuivre la recherche de racine jusqu'à ce que g change de signe dans un invervalle centré en x de rayon ε. Comme g est continue, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que g admet une racine α telle que $|x - \alpha| \leq \varepsilon$.

5. Graphiquement, il faut interpréter cette suite de la manière suivante. On part d'un point $(u_0, f(u_0))$. On trace la tangente a la courbe en ce point, on appelle u_1 l'abscisse de l'intersection avec l'axe des abscisses. Sous la condition (1) ce point est plus proche de la racine.



En itérant ce processus on à une suite convergeant vers la racine. On notera qu'il est indispensable de supposer que g' ne s'annule pas sur I afin de garantir que la tangente intersecte l'axe des abscisses.

Exercice II

1. L'équation $\cos x = x$ n'a pas de solution dans $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ puisque sur cet ensemble $|\cos x| \leq 1$ alors que $|x| > 1$. En outre l'équation n'a pas de solution dans $[-1,0]$ puisque $\cos x > 0$ et $x \leq 0$ sur cet intervalle. Enfin 1 n'est pas solution de l'équation. Donc

$$\text{si } \cos x = x \text{ admet une solution alors } x \in I$$

Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \cos(x) - x$$

Cette application est dérivable, sa dérivée est $g'(x) = -(1+\sin x)$ qui est strictement négative sur I. Ainsi g est strictement décroissante et continue sur I. En conséquence elle ŕealise une bijection de $]0;1[$ sur $[g(1);g(0)]$. Comme $\lim_0 g > 0$ et $\lim_1 g < 0$, le réel 0 a un antécédant unique $\alpha \in I$.

2. La fonction φ est dérivable sur I est sa dérivée est $\varphi(x) = \cos x + \sin x(2\cos x - x)$. Comme $x \in]0;1[\subset]0,\frac{\pi}{3}[$ ont a $\cos x > \frac{1}{2}$ donc $2\cos x > 1$. Or $-x > -1$ donc $2\cos x - x > 0$. D'autre part $\sin x$ et $\cos x$ sont strictement positives lorsque $x \in I$ donc $\varphi'(x) \geq 0$ sur I. Il en résulte que φ est strictement croissante (sur son ensemble de départ qui est I).

Pour tout $x \in I$ on a $\varphi(0) < \varphi(x) < \varphi(1)$ ainsi $|\varphi(x)| < 1$ lorsque $x \in I$. Comme $(1+\sin(x))^2 \geq 1$ il vient que

$$\forall x \in I,\ \frac{|\varphi(x)|}{(1+\sin x)^2} < 1$$

3. La fonction g est bien de classe C^2, sa dérivée ne s'annule pas sur I et la question précédente permet d'affirmer que la condition 1 est satisfaite. Par suite on peut appliquer l'algorithme décrit dans l'exercice précédent. On obtient les resultats suivants :

Itération 0	x=0.5000000000
Itération 1	x=0.7552224170
Itération 2	x=0.7391416661

On trouve le résultat suivant (à 10^{-8} près)

$$\alpha \simeq 0.7391416661$$

4. On fait une dichotomie c'est-à-dire qu'on part de I et à chaque étape on observe le signe de g au milieu de l'intervalle et on ré-itére sur la moitie de l'intervalle dans laquelle se trouve la racine. On obtient les resultats suivants :

Itération 1	x=0.5000000000
Itération 2	x=0.7500000000
Itération 3	x=0.6250000000
Itération 4	x=0.6875000000
Itération 5	x=0.7187500000
Itération 6	x=0.7343750000
Itération 7	x=0.7421875000
Itération 8	x=0.7382812500
Itération 9	x=0.7402343750
Itération 10	x=0.7392578125
Itération 11	x=0.7387695312
Itération 12	x=0.7390136718
Itération 13	x=0.7391357421
Itération 14	x=0.7390747069
Itération 15	x=0.7391052244
Itération 16	x=0.7390899656
Itération 17	x=0.7390823362
Itération 18	x=0.7390861509
Itération 19	x=0.7390842435
Itération 20	x=0.7390851972
Itération 21	x=0.7390847204
Itération 22	x=0.7390849588
Itération 23	x=0.7390850780
Itération 24	x=0.7390851376
Itération 25	x=0.7390851078
Itération 26	x=0.7390851227

On trouve le résultat suivant (à 10^{-8} près)

$$\alpha \simeq 0.7390851227$$

On remarque qu'il faut 26 itérations au lieu de 3. L'utilisation d'un ordinateur permettant de calculer avec plus de decimales, on peut obtenir une valeur approchée à 10^{-100} en 6 itérations avec la méthode décrite dans l'exercice I alors qu'il faut 331 itérations avec une dichotomie.