

## Devoir 3

*A rendre le 28/02/03*

On considère une fonction  $g$  de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  dont la dérivée ne s'annule pas sur  $I = [a, b]$ . On suppose que  $g$  a une unique racine  $\alpha$  dans  $I$ . Il s'agit de calculer une valeur approchée de cette racine.

### Exercice I

Considérons la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n - \frac{g(u_n)}{g'(u_n)} \quad (1)$$

1. Déterminer le ou les équilibres de (1) appartenant à  $I$
2. Donner une condition suffisante pour que ce (ou ces) équilibres soient stables ?
3. Construire une suite qui converge vers  $\alpha$ .
4. Décrire un algorithme, se basant sur cette suite, permettant de trouver une valeur approchée de  $\alpha$  à  $\varepsilon > 0$  près.
5. Interpréter graphiquement cet algorithme.

### Exercice II

On considère l'équation

$$x = \cos x$$

1. Montrer que cette équation a une solution unique dans  $\mathbb{R}$  et que cette solution est dans  $I = ]0; 1[$ .
2. Soit  $\varphi$  définie sur  $I$  par  $\varphi(x) = (x - \cos x) \cos x$ . Montrer que  $\varphi$  est croissante. En déduire que

$$\forall x \in I, \frac{|\varphi(x)|}{(1 + \sin x)^2} < 1$$

3. Utiliser l'algorithme de l'exercice I pour trouver une valeur approchée à  $10^{-8}$  près de la solution de l'équation. On pourra utiliser une calculatrice ou un ordinateur.
4. Utiliser la dichotomie pour trouver une valeur approchée à  $10^{-8}$  près de la solution de l'équation. On pourra utiliser une calculatrice ou un ordinateur. Comparer le résultat et le nombre d'opérations nécessaire, avec la question 3.