Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2002-2003
CS 103 – Analyse I — Semestre 1

Devoir 2

Corrigé

Nous allons montrer que la série

$$S = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$$

est convergente si et seulement si $\alpha > 1$ ou bien si $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Exercice I

Pour α et β fixés notons $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

1. Etudions d'abord le cas $\alpha < 1$. Choisissons $a > 0$ de sorte que $\alpha + a$ soit encore strictement inférieur à 1, par exemple $a = \frac{1}{2}(1 - \alpha)$. On a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(\ln n)^\beta}{n^a} = 0 \tag{1}$$

Cela est clair si $\beta \leq 0$ (ce n'est pas une forme indeterminée) et si $\beta > 0$, c'est une conséquence de $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n^\gamma} = 0$ avec $\gamma = \frac{a}{\beta} > 0$. Ainsi (1) donne

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{(\ln n)^\beta}{n^a} \right| < \epsilon$$

En particulier pour $\epsilon = 1$, il existe un entier n_0 à partir duquel

$$(\ln n)^\beta \leq n^a$$

donc

$$\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \geq \frac{1}{n^{\alpha + a}}$$

En conséquence

- $u_n \geq \frac{1}{n^{\alpha + a}}$ pour $n \geq n_0$
- (u_n) est à termes positifs pour $n \geq n_0$
- $\sum_{n \geq n_0} \frac{1}{n^{\alpha + a}}$ diverge puisque c'est une série de Riemann avec $\alpha + a < 1$

par le théorème de comparaison $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est divergente. Comme la nature d'une série n'est pas affectée par ses premiers termes, S diverge.

Etudions à présent le cas $\alpha > 1$. On peut choisir $a > 0$ de sorte que $\alpha - a > 1$, par exemple $a = \frac{1}{2}(\alpha - 1)$. On démontre de manière analogue au cas précédent que

$$(\ln n)^\beta \geq n^{-a}$$

à partir d'un rang n_0. Donc

$$\frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}} \leq \frac{1}{n^{\alpha-a}}$$

En conséquence

- $u_n \leq \frac{1}{n^{\alpha+a}}$ pour $n \geq n_0$
- (u_n) est à termes positifs pour $n \geq n_0$
- $\sum_{n\geq n_0} \frac{1}{n^{\alpha-a}}$ converge puisque c'est une série de Riemann avec $\alpha - a > 1$

par le théorème de comparaison $\sum_{\geq n_0} u_n$ est divergente. Comme la nature d'une série n'est pas affectée par ses premiers termes, S converge.

2. Si $\beta \leq 0$ alors, pour $n > 2$, $(\ln n)^{\beta} \leq 1$. Ainsi,

$$\frac{1}{n(\ln n)^{\beta}} \geq \frac{1}{n}$$

Comme $u_n \geq 0$, le théorème de comparaison d'applique et donne la divergence de S.

Exercice II

1. Plaçons-nous sur l'intervalle $]e;+\infty[$. On a

$$f_{\beta}(x) = \frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^{\beta}} = \frac{\ln'(x)}{\ln(x)^{\beta}}$$

Ainsi, lorsque $\beta \neq 1$ on a

$$F_{\beta} = \frac{1}{(1-\beta)(\ln x)^{\beta-1}}$$

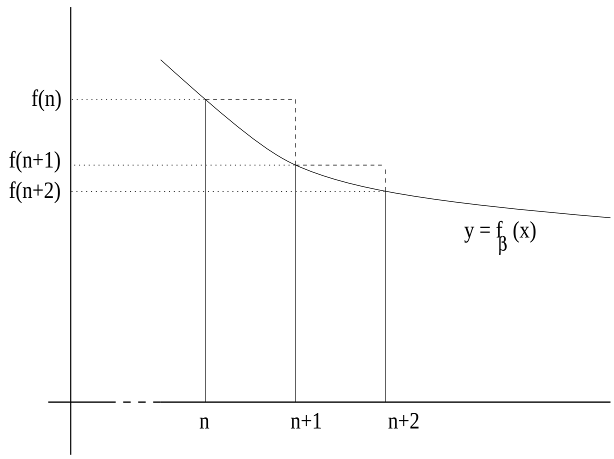
et lorsque $\beta = 1$ on a

$$F_1(x) = \ln(\ln x)$$

2. Une étude rapide de la dérivée de f_{β} montre que cette fonction est décroissante à partir de e. Plaçons nous dans l'intervalle $]e;+\infty[$.

$$f_{\beta}(n+1) \leq \int_n^{n+1} f_{\beta}(x)\,dx \leq f_{\beta}(n) \tag{2}$$

On remarque que cette inégalité est conforme à l'interprétation géométrique selon laquelle l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = n$ et $x = n+1$ est supérieure à l'aire du rectangle dont les sommets sont $(n;0)$, $(n+1;0)$, $(n+1;f(n))$, $(n;f(n))$ et inférieure à l'aire du rectangle dont les sommets sont $(n;0)$, $(n+1;0)$, $(n+1;f(n+1))$, $(n,f(n+1))$.



L'inégalité (2) donne

$$\sum_{n=3}^{N-1} f_\beta(n+1) \leq \sum_{n=3}^{N-1} \int_n^{n+1} f_\beta(x)\, dx \leq \sum_{n=3}^{N-1} f_\beta(n)$$

donc

$$\sum_{n=4}^{N} f_\beta(n) \leq \int_3^N f_\beta(x)\, dx \leq \sum_{n=3}^{N-1} f_\beta(n)$$

donc

$$\sum_{n=4}^{N} u_n \quad \leq \quad F_\beta(N) - F_\beta(3) \tag{3}$$

$$\sum_{n=3}^{N-1} u_n \quad \geq \quad F_\beta(N) - F_\beta(3) \tag{4}$$

Lorsque $\beta > 1$ on a $\lim_{x\to+\infty} F_\beta(x) = 0$, l'inéquation (3) donne que la suite des sommes partielles est majorée, en outre elle est croissante puisque $u_n \geq 0$ ainsi S converge.

Lorsque $\beta \leq 1$ on a $\lim_{x\to+\infty} F_\beta(x) = +\infty$ donc l'inéquation (4) on a la divergence de S.