Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2002-2003
CS 103 – Analyse I — Semestre 1

Devoir 1

A rendre le 6/12/02

Considérons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}} \\ v_n &= \ln u_n \\ w_n &= \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

et la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{1}{x-\frac{1}{2}}+\ln(x-1)-\ln x$$

Exercice I

1. Montrer que $v_n - v_{n-1} = (n-\frac{1}{2})f(n)$.

2. Etudier les variations des suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. Montrer qu'il existe un réel positif C tel que $\lim u_n = C$.

Exercice II

1. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$ on a

$$\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^2}dx$$

en déduire que pour tout entier $n \geq 2$ on a

$$w_n \leq \int_1^n \frac{1}{x^2}dx$$

et interpreter graphiquement ces deux inégalités.

2. Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel inférieur à 1.

3. Montrer que

$$\forall x \in [2,+\infty[,\ \ f(x) \geq -\frac{1}{5x^2(x-\frac{1}{2})}$$

4. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$ on a $v_k - v_{k-1} \geq -\frac{1}{5k^2}$.

5. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$ on a $v_n \geq -\frac{1}{5}w_n + 1$.

6. En déduire que $C \geq e^{\frac{4}{5}}$

7. En déduire un équivalent de $n!$ en $+\infty$.