Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

Année 2002-2003
Semestre 2

# Feuille d'exercices 5

*Adhérence, Intérieur, Frontière*

## Exercice I

Montrer que si $A \subset B$ alors $\mathring{A} \subset \mathring{B}$. La réciproque est-elle vraie ?

## Exercice II

Montrer que si $A \subset B$ alors $\overline{A} \subset \overline{B}$. La réciproque est-elle vraie ?

## Exercice III

Comparer $\overset{\circ}{(A \cup B)}$ et $\mathring{A} \cup \mathring{B}$. Même question pour $\overset{\circ}{(A \cap B)}$ et $\mathring{A} \cap \mathring{B}$.

## Exercice IV

Comparer $\overline{(A \cup B)}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$. Même question pour $\overline{(A \cap B)}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$.

## Exercice V

On dit que $A \subset \mathbb{R}$ est rare si $\mathring{\overline{A}} = \emptyset$, et que $B$ est de la première catégorie de Baire[1] (ou encore un ensemble maigre) s'il est contenu dans une réunion dénombrable d'ensembles rares.

**1.** Donner un exemple d'ensemble rare et un exemple d'ensemble de la première catégorie de Baire.

**2.** L'intersection de deux ensembles de la première catégorie de Baire est-il un un ensembles de la première catégorie de Baire ? Qu'en est-il de la réunion ?

[1] René Baire, mathématicien français, de la fin du XIXe siècle et du début du XXe siècle, travailla sur de nombreux domaines et en particulier la théorie des fonctions et le concept de limite.

René-Louis Baire (1874-1932)

## Exercice VI

Pour chacun des ensembles suivants, indiquez l'intérieur, l'adhérence et la frontière.

$$
\begin{array}{lllllllll}
A & = & \cup_{n=1}^{+\infty}\{\frac{1}{n}\} & B & = & A \cup \{0\} & C & = & ]0,1] \cup \{0;2;4\} \\
D & = & [1,2] & E & = & ]0,1[\cup\{2\} & F & = & ]-\infty,0] \cup \{-1;2\} \\
G & = & \mathbb{Q} & H & = & \mathbb{R}^* & I & = & \cup_{n=1}^{+\infty}]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[ \\
J & = & ]-1,0[\cup]0,1[ & K & = & \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} & L & = & \mathbb{Z}
\end{array}
$$

## Exercice VII

Donner l'exemple d'un ensemble $A$ pour lequel $A$, $\overline{A}$, $\mathring{\overline{A}}$, $\overline{\mathring{\overline{A}}}$, $\mathring{A}$, $\overline{\mathring{A}}$ sont deux à deux distincts.

## Exercice VIII

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$.

**1.** Comparer $\partial(A \cup B)$ et $(\partial A) \cup (\partial B)$

**2.** Comparer $\partial(A \cap B)$ et $(\partial A) \cap (\partial B)$

## Exercice IX

Soit $A \subset \mathbb{R}$

**1.** Comparer $\partial(\mathring{A})$ et $\mathring{(\partial A)}$.

**2.** Comparer $\partial(\overline{A})$ et $\overline{(\partial A)}$.

**3.** A-t'on forcement $\partial(\partial A) = \emptyset$ ?

## Exercice X

Pour tout ensemble $A \subset \mathbb{R}$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on note

$$A^n = \left\{ x \in \mathbb{R}, \ \left]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[ \cap A \neq \emptyset \right\}$$

**1.** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{A} \subset A^n$

**2.** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \cup_{x \in A}]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$

**3.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n$ est un ouvert

**4.** Montrer que $\overline{A} = \cap_{n \in \mathbb{N}^*} A^n$

**5.** Montrer que tout fermé est l'intersection dénombrable d'ouverts. Cela est-il encore vrai si on remplace "dénombrable" par "fini" ?