

Feuille d'exercices 3

Suites numériques récurrentes

Exercice I

Déterminer le terme général de la *suite de Fibonacci*¹ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$$

Exercice II

Calculer les 5 premiers termes des suites suivantes, au moyen d'un graphe

1. $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 3u_n$ pour $n \geq 0$
2. $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n$ pour $n \geq 0$

Exercice III

On considère la relation de récurrence $u_{n+1} = (u_n)^2$

1. Quels sont le ou les équilibres de cette relation.
2. Pour chaque équilibre dites s'il est stable ou instable.
3. Au moyen d'un graphe, que vous réaliserez sur le papier millimétré joint, déterminez la valeur des 4 premiers termes de la suite issue de la condition initiale $u_0 = \frac{1}{2}$.

¹Leonardo Pisano, surnomé Fibonnaci, est un mathématicien italien du début du XIIIe siècle. Il passa son enfance en Afrique du Nord où son père dirigeait une sorte de comptoir. C'est ainsi qu'il eut l'occasion d'étudier les travaux algébriques d'al-Khuwārizmī. Par la suite il voyagea dans le monde méditerranéen rencontrant de nombreux scientifiques et prenant connaissance des différents systèmes de calculs en usage. De retour à Pise, il publie *Liber abaci* où il expose le système de numération indo-arabe et le compare au système romain. Il est le premier grand mathématicien occidental à l'adopter et à le vulgariser auprès des scientifiques. Fibonacci poursuivit également ses propres travaux, il est à l'origine de cette suite récurrente, qui décrit la démographie d'une population de lapins.



Leonardo Pisano dit Fibonacci (~ 1170–1250)

Exercice IV

On souhaite étudier la suite définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + 1} \text{ pour } n \geq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \geq 0, u_n \in [0, +\infty[$.
2. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît.
3. Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice V

Déterminer u_1 pour que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

soit à termes positifs.

Exercice VI

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2 \end{cases}$$

Etudier (au mieux) le comportement de la suite selon a .