

Feuille d'exercices 1

Limites de suites

Exercice I

Calculer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, si elle existe, dans les cas suivants.

1. $u_n = \frac{3^n}{n!}$
2. $u_n = 3^n - n^3$
3. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}$
4. $u_n = n \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)$
5. $u_n = \frac{n^2 - n}{n^2 + 1}$

Exercice II

Dire si les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivantes vérifient le critère de Cauchy¹

1. $u_n = \frac{1}{n+2}$
2. $u_n = n^2$

Exercice III

Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = 2u_n^2 + 3u_n \end{cases}$$

1. Démontrer que (u_n) est une suite croissante à termes positifs.
2. Démontrer que (u_n) est divergente.

¹Augustin Cauchy, mathématicien français du XIX^e siècle, donna pour la première fois des définitions rigoureuses de la convergence et de la continuité. Il définit également les nombres complexes. Il travailla aussi sur les groupes de permutations ; cependant ayant égaré des manuscrits d'Abel et de Galois, il a retardé d'un demi-siècle la théorie des groupes.



Baron Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

Exercice IV

En utilisant la définition de la limite, montrer que

$$\lim e^{2n+1} = +\infty$$

Exercice V

En utilisant la définition de la limite, dites si les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suivantes ont une limite.

1. $u_n = n^6$
2. $u_n = \ln n$
3. $u_n = \frac{1+e^n}{n}$
4. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$
5. $u_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n+4}} + 2$
6. $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n^3}$

Exercice VI

1. Soit $(v_n)_{n \geq 2}$ la suite définie par

$$v_n = \frac{n}{(\ln n)^2}$$

Montrer que cette suite est croissante des son 7e terme (c'est-à-dire pour $n \geq 8$).

2. En déduire que pour tout entier $n \geq 8$ on a

$$n \geq (\ln n)^2$$

3. En utilisant la définition de la limite, montrer que

$$\lim \frac{n}{\ln n} = +\infty$$

Exercice VII

En utilisant la définition des suites de Cauchy démontrez que la somme de deux suites de Cauchy est une suite de Cauchy.

Exercice VIII

Est-ce que toute suite convergente d'entiers est stationnaire à partir d'un certain rang ?