Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2001-2002
CS 103 – Analyse I — F 02 – Semestre 1

Interrogation du 12/3/2002

Corrigé

Exercice I

1. Le réel x est solution de l'inéquation si et seulement

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 2 \geq x - 2 \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[\\ x \geq 2 \\ x^2 - x \geq 0 \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x(x-1) \geq 0 \end{cases}$$

si et seulement si

$$x \geq 2$$

Ainsi $S = [2; +\infty[$.

2. Le réel x est solution de l'inéquation si et seulement si

$$(x^2 - 4 \geq 0 \text{ et } x^2 - 4 \geq x + 8) \text{ ou } x^2 - 4 \leq 0 \text{ et } -x^2 + 4 \geq x + 8)$$

si et seulement si

$$(x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[\text{ et } x^2 - x - 12 \geq 0) \text{ ou } -2 \leq x \leq 2 \text{ et } -x^2 - x - 4 \geq 0)$$

Or $x^2 - x - 12$ a pour discriminant $\Delta = 49$ et pour racines -3 et 4, et $-x^2 - x - 4$ a pour discriminant $\Delta = -15$ si bien que $-x^2 - x - 4$ est toujours négatif car du signe du coefficient dominant. Ainsi x est solution de l'inéquation si et seulement si

$$x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[\text{ et } x \in]-\infty, -3[\cup]4, +\infty[$$

si et seulement si

$$x \in]-\infty, -3] \cup [4, +\infty[$$

donc $S =]-\infty, -3] \cup [4, +\infty[$.

Exercice II

1. Soit p et q deux entiers naturels tels que $\varphi(p) = \varphi(q)$ alors

$$\begin{cases} p = q \\ p^2 = q^2 \\ (-1)^p = (-1)^q \end{cases}$$

en particulier $p = q$. Donc φ est injective.

2. Il n'existe par d'entier n tel que $\varphi(n) = (1, 4, -1)$ en effet $\varphi(n) = (1, 1, -1)$ entraine $n = 1$ et $n^2 = 4$ et $(-1)^n = 1$ ce qui est impossible. Donc φ n'est pas surjective.

Exercice III

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{1}{n} \in]0, 1]$ donc 1 majorant est 1 et un minorant est 1. En outre 1 est plus grand element puisqu'il appartient à l'ensemble, il est donc également borne supérieure.

L'ensemble des minorants contient $]-\infty, 0]$. Supposons qu'il y ait d'autre minorants. Soit alors $m > 0$ un tel minorant. Pour $n = \mathrm{E}(\frac{1}{m}) + 1$ on a $\frac{1}{n} < m$ donc m n'est pas un minorant. Contradition. Ainsi $]-\infty, 0]$ contient l'ensemble des minorants. Par suite l'ensemble des minorants est $]-\infty, 0]$. La borne inférieure de E est donc 0, par suite E n'a pas de plus petit élement.