

Rattrapage du 9/6/2001

Correction

Exercice I

1.

Intérieur : $\overset{\circ}{A} =]-1, 2[$.

En effet A n'est pas voisinage de 2 ni de 3, les autres éléments de $] - 1, 2[$ admettent a comme voisinage.

Adhérence : $\overline{A} = [-1, 2] \cup \{3\}$.

En effet la suite $u_n = 2 - \frac{1}{n}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers 2. Les éléments qui ne sont pas dans $[-1, 2] \cup \{3\}$ sont à distance strictement positive de A et ne peuvent pas être dans l'adhérence.

Frontière : $\partial A = \{-1, 2, 3\}$.

En effet $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Points isolés et d'accumulation : $A^* = \{3\}$ et $A' = [-1, 2]$.

En effet $]3 - \frac{1}{2}, 3 + \frac{1}{2}[\cap A = \{3\}$ donc 3 est isolé, d'autre part tous les points de $[-1, 2]$ sont d'accumulation puisque pour tout x dans cet intervalle $\forall \varepsilon > 0$, $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Comme $A^* \cup A' = \overline{A}$ et $A^* \cap A' = \emptyset$, on en déduit le résultat annoncé.

2.

Intérieur : $\overset{\circ}{B} = \emptyset$.

En effet B n'est voisinage d'aucun de ses point.

Adhérence : $\overline{B} = \mathbb{R}^- \cup N$.

En effet tout réel négatif est la limite d'une suite de rationnels négatifs. Et les suites d'entiers naturels convergentes sont constantes à partir d'un certain rang ; donc, ont un entier comme limite.

Frontière : $\partial B = \mathbb{R}^- \cup N$.

En effet $\partial B = \overline{B} \setminus \overset{\circ}{B}$.

Points isolés et d'accumulation : $B^* = \mathbb{N}^*$ et $B' = \mathbb{R}^-$.

En effet pour n entier non nul, $]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}[\cap B = \{n\}$ donc n est isolé, d'autre part tous les points de \mathbb{R}^- sont d'accumulation puisque $\forall x \in \mathbb{R}^- \forall \varepsilon > 0$, $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap (B \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Comme $B^* \cup B' = \overline{B}$ et $B^* \cap B' = \emptyset$ on en déduit le résultat.

Exercice II

Posons $u_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$.

1. A n'est pas ouvert puisqu'il n'est pas voisinage de $2 \in A$. (remarquons que si c'était le cas il serait indénombrable).

2. A n'est pas fermé puisque pour tout entier n on a $u_n \in A$ et pourtant $\lim u_n = 0 \notin A$.
3. Soit $\Omega_n =]u_{n+1}, u_{n-1}[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Omega_0 =]\frac{5}{6}, 3[$. Comme (u_n) est décroissante on a $u_n \in \Omega_n$. De plus $u_n \notin \Omega_m$ lorsque $n \neq m$. Ainsi $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un recouvrement de A mais si on considère $(\Omega_n)_{n \in J}$ avec J strictement inclus dans \mathbb{N} (et *a fortiori* fini) la famille d'ensemble $(\Omega_n)_{n \in J}$ ne recouvre plus A .
4. A n'est pas compact par la question précédente et Borel-Lebesgue. On pouvait aussi le déduire du fait que A n'est pas fermé.

Exercice III

1. L'ensemble $[1, 2]$ est parfait puisque fermé est sans point isolé. En revanche $[1, 2[$ n'est pas parfait.

2. Une réunion finie d'ensembles fermés est fermé, il suffit donc de montrer qu'une réunion finie d'ensemble sans point isolé est sans point isolé.

Soit A et B deux ensembles sans point isolé. Supposons que $A \cup B$ admette un point isolé x , alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap (A \cup B) = \{x\}$$

donc

$$(|x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap A) \cup (|x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap B) = \{x\}$$

donc $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap A = \{x\}$ ou $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap B = \{x\}$ ainsi A ou B admet un point isolé. Contradiction. Ainsi la réunion de deux ensembles sans point isolé est sans point isolé.

Soit maintenant (H_n) l'hypothèse : la réunion de n ensembles sans point isolé est sans point isolé. Ce qui précède montre que (H_2) est vraie. Supposons (H_n) vraie et considérons un $(n + 1)$ -ième ensemble. Les n premiers ensembles sont sans point isolé donc il en est de même de leur réunion, par (H_n) . La réunion des n premiers union le $(n + 1)$ -ième sont sans point isolé par (H_2) . Ainsi (H_{n+1}) est sans point isolé, donc (H_n) est vraie, ce qui achève la démonstration.

Exercice IV

1. Soit $x \in A \cap \overline{B}$. Comme $x \in \overline{B}$, il existe (u_n) suite d'éléments de B qui converge vers x . D'autre part, comme $x \in A$ et que A est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A$. Comme $\lim u_n = x$, il existe un rang N tel que $n > N$ entraîne $|u_n - x| < \varepsilon$. Donc pour $n > N$ on a $u_n \in A$. Par suite $u_n \in A \cap B$. Il existe donc une suite d'éléments de $A \cap B$ (par exemple la suite extraite de (u_n) des termes dont l'indice est strictement supérieur à N) qui converge vers x . Donc $x \in \overline{A \cap B}$. Ainsi $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$

2. L'inclusion $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$ n'est pas vraie sans l'hypothèse A ouvert comme le montre le contre-exemple suivant : $A =]0, 1]$ et $B =]1, 2[$.

3. Il suffit de prendre $A =]0, 2[\cup]3, 4[$ et $B =]1, 3[$.