Pôle Universitaire Léonard de Vinci | Année 2000-2001
CS 103 – Analyse I | Semestre 2

Rattrapage du 9/6/2001

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Vos réponses doivent être justifiées et rédigées. Les quatre exercices sont indépendants. Le sujet contient deux pages. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice I (6 points)

1. On considère l'ensemble $A = [-1, 2[\cup \{3\}$. Quel est son intérieur, son adhérence, sa frontière, son ou ses points isolés et son ou ses points d'accumulation ?

2. Même question avec $B = \mathbb{Q}^- \cup \mathbb{N}$.

Exercice II (6 points)

On considère

$$A = \left\{ \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

1. L'ensemble A est-il ouvert ?

2. L'ensemble A est-il fermé ?

3. Expliciter un recouvrement de A par des ouverts, dont on ne peut pas extraire un sous recouvrement fini.

4. L'ensemble A est-il compact ?

Exercice III (3 points)

On dit qu'un ensemble est parfait lorsqu'il est fermé et sans point isolé.

1. Donner un exemple d'ensemble parfait et un exemple d'ensemble qui ne l'est pas.

2. Montrer qu'une réunion finie d'ensembles parfaits est un ensemble parfait.

Exercice IV (5 points)

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$, deux ensembles.

1. On suppose que A est ouvert. Montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

2. L'inclusion $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$ est-elle toujours vraie sans l'hypothèse A ouvert ?

3. Donner un exemple d'ensembles ouverts A et B tels que les quatre ensembles

$$A \cap \overline{B}\ ,\quad \overline{A} \cap B\ ,\quad \overline{A \cap B} \quad \text{et} \quad \overline{A} \cap \overline{B}$$

soient tous différents.