Pôle Universitaire Léonard de Vinci | Année 2000-2001
CS 103 – Analyse I | Semestre 1

Rattrapage du Quiz du 21/12/2000

Enoncé et correction

Exercice

Montrer que

1. Si $\lim u_n = -\infty$ et $\lim v_n = -\infty$ alors $\lim(u_n + v_n) = -\infty$

2. Si $\lim u_n = l \in \mathbb{R}$ et $\lim v_n = +\infty$ alors $\lim(u_n + v_n) = +\infty$

3. Si $\lim u_n = +\infty \in \mathbb{R}$ et $\lim v_n = +\infty$ alors $\lim(u_n v_n) = +\infty$

Correction

1. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers $-\infty$ donc

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ n > N \Rightarrow u_n < A$$

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ n > N \Rightarrow v_n < A$$

Ainsi, soit $A \in \mathbb{R}$, il existe un entier N_1 tel que si $n > N_1$ alors $u_n < \frac{A}{2}$. De même, il existe un entier N_2 tel que si $n > N_2$ alors $v_n < \frac{A}{2}$. En conséquence, il existe $N = \max\{N_1, N_2\}$ tel que $u_n + v_n < A$. Cela établit que

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ n > N \Rightarrow u_n + v_n < A$$

c'est-à-dire que $\lim(u_n + v_n) = -\infty$.

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n > N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ n > N \Rightarrow v_n > A$$

Ainsi, soit $A \in \mathbb{R}$, il existe un entier N_1 tel que si $n > N_1$ alors $v_n > A + 1 - l$. De même, il existe un entier N_2 tel que si $n > N_2$ alors $|u_n - l| < 1$, c'est-à-dire $l - 1 < u_n < l + 1$. En conséquence, il existe $N = \max\{N_1, N_2\}$ tel que $u_n + v_n > A$. Cela établit que

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ n > N \Rightarrow u_n + v_n > A$$

c'est-à-dire que $\lim(u_n + v_n) = +\infty$.

3. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers $+\infty$ donc

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ n > N \Rightarrow u_n > A$$

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ n > N \Rightarrow v_n > A$$

Ainsi, soit $A \in \mathbb{R}$, il existe un entier N_1 tel que si $n > N_1$ alors $u_n > \sqrt{|A|}$. De même, il existe un entier N_2 tel que si $n > N_2$ alors $v_n > \sqrt{|A|}$. En conséquence, il existe $N = \max\{N_1, N_2\}$ tel que $u_n v_n > |A| \geq A$. Cela établit que

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ n > N \Rightarrow u_n v_n > A$$

c'est-à-dire que $\lim(u_n v_n) = +\infty$.