Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2000-2001
CS 103 – Analyse I — Semestre 1

Rattrapage du Quiz du 12/12/2000

Enoncé et correction

Enoncé

Dans les cas suivants, dire si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le cas échéant, précisez quelle est l'application φ utilisée.

1. $u_n = 4n$, $v_n = n$

2. $u_n = n$, $v_n = n^2$

3. $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$, $v_n = \frac{2n+1}{2n}$

4. $u_n = 4^n$, $v_n = (-1)^n$

5. $u_n = e^n$, $v_n = 2^n$

6. $u_n = n^2$, $v_n = 2n^2 + 1$

7. $u_n = n^p$, $v_n = n^q$, où p et q sont des entiers naturels. Discuter selon p et q le cas échéant.

Correction

On cherche une fonction φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$ ou $u_n = v_{\varphi(n)}$. Dans un certain nombre de cas l'obstruction au fait d'avoir une suite extraite vient du fait que φ n'est pas de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car $u_n = v_{\varphi(n)}$ avec $\varphi(n) = 4n$ strictement croissante. Le contraire n'est pas vrai, par exemple il n'existe pas d'entier naturel n tel que $v_2 = u_n$.

2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car $u_n = v_{\varphi(n)}$ avec $\varphi(n) = n^2$ strictement croissante. Le contraire n'est pas vrai, par exemple il n'existe pas d'entier naturel n tel que $v_2 = u_n$.

3. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car $v_n = u_{\varphi(n)}$ avec $\varphi(n) = 2n$ strictement croissante. En effet, on a bien $u_{2n} = 1 + \frac{1}{2n} = \frac{2n+1}{2n} = v_n$. Le contraire n'est pas vrai, par exemple il n'existe pas d'entier naturel n tel que $v_1 = u_n$.

4. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une sous-suite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car il n'existe pas d'entier naturel n tel que $u_1 = v_n$. De même $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car il n'existe pas d'entier naturel n tel que $v_2 = u_n$.

5. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une sous-suite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car il n'existe pas d'entier naturel n tel que $u_1 = v_n$. De même $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car il n'existe pas d'entier naturel n tel que $v_1 = u_n$.

6. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une sous-suite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car il n'existe pas d'entier naturel n tel que $u_2 = v_n$. De même $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car il n'existe pas d'entier naturel n tel que $v_2 = u_n$.

7.

- Si $p=0$ et $q=0$ alors les suites sont égales donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Si $p=0$ et $q\neq 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une sous-suite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car $u_n=1$ pour tout n et $v_n\neq 1$ pour $n\neq 1$.
- De la même manière, si $q=0$ et $p\neq 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une sous-suite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Si p et q sont non-nuls alors
  - Si p divise q alors soit $\varphi(n)=n^{\frac{q}{p}}$ on a
  $$u_n=n^p=n^{q\frac{p}{q}}=(n^{\varphi pq})^q=\varphi(n)^q=v_{\varphi(n)}$$
  La fonction φ est strictement croissante donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  - De même si q divise p alors $v_n=u_{\psi(n)}$ avec $\psi(n)=n^{\frac{q}{p}}$ donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  - Si p ne divise pas q alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite extraite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car si c'etait le cas il existerait $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ telle que $\varphi(n)=n^{\frac{p}{q}}$ donc $\frac{p}{q}$ serait entier ce qui est contraire à l'hypothèse.
  - De même si q ne divise pas p alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.