Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2000-2001
CS 103 – Analyse I — Semestre 1

Rattrapage du Quiz 1

Enoncé et correction

Enoncé

Soient A et B deux intervalles fermés et bornés, c'est-à-dire de la forme $[x, y]$ avec x et y réels tels que $x < y$. On note

$$A + B = \{x \in \mathbb{R},\ \exists (a, b) \in A \times B,\ x = a + b\}$$
$$AB = \{x \in \mathbb{R},\ \exists (a, b) \in A \times B,\ x = ab\}$$

1. Que vaut

$$C = [1, 2] + [-1, 5]$$
$$D = [1, 2]\,[-1, 5]$$

2. Soit A et B deux intervalles. Les applications f et g définies par

$$\begin{array}{rcl} f\ :\ A \times B & \to & A + B \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} g\ :\ A \times B & \to & A + B \\ (x, y) & \mapsto & xy \end{array}$$

sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

3. Si $A = [a, \alpha]$ et $B = [b, \beta]$ montrer que $A + B$ et AB sont des intervalles fermés et bornés et trouver les bornes de ces intervalles.

4. Montrer que $A + B = B + A$.

Correction

1.

Montrons que $C = [0, 7]$**.** $x \in C$ équivaut à $\exists a \in [1, 2],\ \exists b \in [-1, 5],$ t.q $x = a + b$.

$$\begin{array}{rcccl} 1 & \leq & a & \leq & 2 \\ -1 & \leq & b & \leq & 5 \end{array}$$

ce qui donne $0 \leq a + b \leq 7$, c'est-à-dire $x \in [0, 7]$.

Montrons que $D = [-2, 10]$**.** Soit $x \in D$, on a $x = ab$ avec

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \leq & a & \leq & 2 \\ -1 & \leq & b & \leq & 5 \end{array}$$

En multipliant membre à membre $a \leq 2$ et $b \leq 5$ il vient $ab \leq 10$. En outre on a $a \leq 2$ et $-1 \leq b$ ainsi $-b \leq 1$ donc en multipliant membre à membre il vient $-ab \leq 2$ d'où $-2 \leq ab$. En conséquence

$$\begin{array}{ccccc} -2 & \leq & ab & \leq & 10 \end{array}$$

c'est-à-dire $x \in [-2, 10]$

2.

La fonction f **:**

Injectivité. La fonction f n'est pas injective comme le montre le contre exemple suivant : $A = [1, 2]$, $B = [-1, 5]$, $f(2, 0) = 2 = f(1, 1)$ alors que $(2, 0) \neq (1, 1)$.

Surjectivité. Soit $x \in A + B$ alors, par définition de $A + B$, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $x = a + b$ donc $x = f(a, b)$. Ainsi f Est surjective.

Bijectivité. Comme f n'est pas injective, elle n'est pas bijective.

La fonction g **:**

Injectivité. La fonction f n'est pas injective comme le montre le contre exemple suivant : $A = [1, 2]$, $B = [-1, 5]$, $g(2, \frac{1}{2}) = 1 = g(1, 1)$ alors que $(2, \frac{1}{2}) \neq (1, 1)$.

Surjectivité. La fonction f n'est pas surjective comme le montre le contre exemple suivant : $A = [-1, 0]$, $B = [2, 3]$, $A + B = [1, 3]$. L'élément $1 \in A + B$ ne peut pas s'écrire ab avec $a \in A$ et $b \in B$ car ab est toujours négatif.

Bijectivité. Comme g n'est pas injective (ou pas surjective), elle n'est pas bijective.

3. La somme $A + B$ ne pose aucun problème, il suffit de reprendre la question 1 en remplacant 1 par a, 2 par α, -1 par b et 2 par β, il vient

$$A + B = [a + \alpha, b + \beta]$$

En ce qui concerne le produit AB, on distingue 9 cas, en effet on distingue

- $0 < a$
- $0 \in [a, \alpha]$
- $\alpha < 0$

qui se conjugue avec

- $0 < b$
- $0 \in [b, \beta]$
- $\beta < 0$

Pour chacun de ces cas on procède de manière analogue à la question 1. En regroupant tous les cas on obtient finalement

$$AB = [\min\{ab, a\beta, \alpha b, \alpha\beta\}, \max\{ab, a\beta, \alpha b, \alpha\beta\}]$$

4. $A + B = [a + b, \alpha + \beta] = [b + a, \beta + \alpha] = B + A$