

Interrogation du 1/3/2001

Correction

Exercice I

Dans le graphe ci-dessous, les bornes des intervalles sont ouvertes



Et on a :

$$\begin{aligned}\bar{A} &= [0, 2] \cup \{3\} \cup [4, 5] \\ \overset{\circ}{A} &=]0, 1[\cup]1, 2[\\ \partial A &= \{0, 1, 2, 3\} \cup [4, 5] \\ A^* &= \{3\} \\ A' &= [0, 2] \cup [4, 5] \\ \overline{\bar{A}} &= [0, 2] \cup \{3\} \cup [4, 5] \\ \overset{\circ}{\bar{A}} &=]0, 2[\cup]4, 5[\end{aligned}$$

Exercice II

- Supposons que A ou B est ouvert. Sans perte de généralité on peut supposer que c'est A .
 - Si A ou B est vide alors $A + B$ est vide, dans ce cas A ou B ouvert implique $A + B$ ouvert.
 - Sinon, soit $x \in A + B$. Il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $x = a + b$. Comme A est ouvert, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset A$. Alors $]a + b - \varepsilon, a + b + \varepsilon[\subset A + B$, ce qui donne

$$]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A + B$$

donc $A + B$ est voisinage de x . Ainsi $A + B$ est un ouvert.

La réciproque est fausse comme le montre le contre-exemple suivant : $A = [0, +\infty[$, $B =]-\infty, 0]$, $A + B = \mathbb{R}$.

- Soit $x \in \bar{A} + \bar{B}$ alors il existe $a \in \bar{A}$ et $b \in \bar{B}$ tels que $x = a + b$. Comme $a \in \bar{A}$ il existe une suite (u_n) d'éléments de A qui converge vers a . Comme $b \in \bar{B}$ il existe une suite (v_n) d'éléments de B qui converge vers b . Soit alors $w_n = u_n + v_n$. On a (w_n) suite d'éléments de $A + B$ qui converge vers $a + b = x$. Donc $x \in \overline{(A + B)}$.

- Montrons que $\overset{\circ}{A} + \overset{\circ}{B} \subset (A + B)^\circ$. Soit $x \in \overset{\circ}{A} + \overset{\circ}{B}$ alors il existe $a \in \overset{\circ}{A}$ et $b \in \overset{\circ}{B}$ tels que $a + b = x$. Donc il existe $\varepsilon_1 > 0$ et $\varepsilon_2 > 0$ tels que

$$]a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1[\subset A, \quad]b - \varepsilon_2, b + \varepsilon_2[\subset B$$

Posons $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ alors $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A + B$ donc $x \in (A + B)^\circ$.

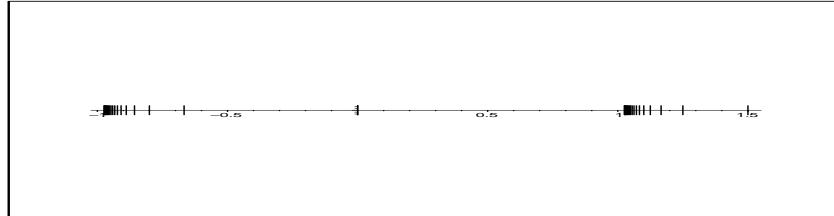
L'inclusion réciproque est fautive comme le montre le contre-exemple

$$A = \mathbb{Q}, B = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}$$

On a $(A + B)^\circ = \mathring{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ et $\mathring{A} + \mathring{B} = \emptyset + \emptyset = \emptyset$.

Exercice III

1. On a la graphe suivant :



2. Soit $x \in A$. Pour tout $\varepsilon > 0$ on a $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\not\subset A$, en effet si on avait une telle inclusion, A contiendrait une infinité non dénombrable d'éléments ce qui est exclu puisque A n'est pas dénombrable. Donc A n'est pas voisinage de x . Donc $\mathring{A} = \emptyset$.

3. L'ensemble A n'est pas fermé puisque la suite $u_n = \frac{1}{n}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers $0 \notin A$.

Montrons que $\overline{A} = A \cup \{-1, 1\}$. Soit $x \in \overline{A}$ alors il existe une suite (u_n) d'éléments de A qui converge vers x .

On commence par montrer qu'à partir d'un certain rang, soit (u_n) est à termes dans $B = \{1 + \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ soit elle est à termes dans $C = \{-1 + \frac{1}{2n+1}, n \in \mathbb{N}\}$. Pour cela on peut utiliser la définition de la limite ou le critère de Cauchy.

Montrons maintenant que (u_n) converge vers -1 vers 1 ou vers un élément de A .

- Premier cas : (u_n) est dans B à partir d'un certain rang. Notons l sa limite et supposons que $l \notin B \cup \{1\}$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 + \frac{1}{n+1} < l < 1 + \frac{1}{n}$. Soit alors $\varepsilon = \min\{l - (1 + \frac{1}{n+1}), 1 + \frac{1}{n} - l\}$. Il existe un rang à partir duquel u_n est élément de $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ mais alors $u_n \notin B$. Contradiction. Ainsi $l \in B \cup \{1\}$
- Deuxième cas : (u_n) est dans C à partir d'un certain rang. On procède de manière analogue en supposant que $l \notin C \cup \{-1\}$ et en obtenant arrivant à une contradiction. Ainsi $l \in C \cup \{-1\}$

On a donc démontré que $\lim u_n \in A \cup \{-1, 1\}$ Donc $\overline{A} \subset A \cup \{-1, 1\}$. Réciproquement pour tout élément de $A \cup \{-1, 1\}$ on peut construire une suite d'éléments de A qui converge vers cet élément, soit une suite constante si $x \in A$ soit $1 + \frac{1}{2n}$ ou $-1 + \frac{1}{2n+1}$.

4. On a $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = A \cup \{-1, 1\}$.

5. On dit que a est un point d'accumulation de A si

$$\forall \varepsilon > 0,]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$$

et qu'il est point isolé de A si

$$\exists \varepsilon > 0,]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap A = \{a\}$$

L'ensemble des points isolés est noté A^* et l'ensemble des points d'accumulations est noté A' . De manière analogue à la question 3 on a $A' = \{-1, 1\}$ et $A^* = A$.