

Interrogation du 1/3/2001

Durée de l'épreuve : 1 heure 15

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les trois exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice I (4 points)

On considère

$$A =]0, 1[\cup]1, 2[\cup \{3\} \cup ([4, 5] \cap \mathbb{Q})$$

Représenter graphiquement A puis, sans démonstration, donner \overline{A} , $\overset{\circ}{A}$, ∂A , A^* , A' , $\overline{\overline{A}}$, $\overset{\circ}{\overline{A}}$.

Exercice II (7 points)

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$. On note

$$A + B = \{x \in \mathbb{R}, \text{ t.q. } \exists (a, b) \in A \times B, x = a + b\}$$

1. Montrer que si A ou B est ouvert alors $A + B$ est ouvert. La réciproque est-elle vraie ?
2. Démontrer que $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$.
3. Comparer $(A + B)^\circ$ et $\overset{\circ}{A} + \overset{\circ}{B}$. C'est-à-dire dites si $(A + B)^\circ \subset \overset{\circ}{A} + \overset{\circ}{B}$ et/ou si $\overset{\circ}{A} + \overset{\circ}{B} \subset (A + B)^\circ$. Faites une démonstration ou donnez un contre exemple.

Exercice III (9 points)

On considère

$$A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

1. Représenter A graphiquement.
2. L'ensemble A est-il ouvert ? Calculer $\overset{\circ}{A}$. On fera une démonstration.
3. L'ensemble A est-il fermé ? Calculer \overline{A} . On fera une démonstration.
4. Que vaut ∂A ?
5. Rappeller la définition de A' et de A^* puis indiquer ce que valent ces ensembles. On fera une démonstration.