

Interrogation du 20/12/2000

correction

Exercice I

On rappelle que pour un réel A on a $|A| = A$ si $A \geq 0$ et $|A| = -A$ si $A < 0$. Or

$$\begin{aligned} x + 2 \geq 0 &\iff x \geq -2 \\ 2x - 3 \geq 0 &\iff x \geq \frac{3}{2} \\ x + 5 \geq 0 &\iff x \geq -5 \end{aligned}$$

ce qui nous permet de faire le tableau suivant

x	$-\infty$	-5	-2	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$ x + 2 $	$-x - 2$	$-x - 2$	$x + 2$	$x + 2$	
$ 2x - 3 $	$-2x + 3$	$-2x + 3$	$-2x + 3$	$2x - 3$	
$ x + 5 $	$-x - 5$	$x + 5$	$x + 5$	$x + 5$	
Equation	$-3x + 1 = -x - 5$	$-3x + 1 = x + 5$	$-x + 5 = x + 5$	$3x - 1 = x + 5$	
Solutions	$x = 3$ Non admissible	$x = -1$ Non admissible	$x = 0$	$x = 3$	

Ainsi les solutions sont dans l'ensemble $S = \{0; 3\}$.

Exercice II

Notons $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2^n}$ et $l = 1$. Soit $\varepsilon > 0$ un réel. Posons $N = \mathbb{E}\left(-\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2}\right) + 1$ si cette quantité est positive, et 0 sinon.

$$\begin{aligned} n \geq N &\Rightarrow n > -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2} \\ n \geq N &\Rightarrow n \ln 2 > \ln \frac{1}{\varepsilon} \\ n \geq N &\Rightarrow 2^n > \frac{1}{\varepsilon} \\ n \geq N &\Rightarrow \frac{1}{2^n} < \varepsilon \\ n \geq N &\Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

ce qui démontre que $\lim u_n = l$.

Exercice III

1. Supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admette une limite, alors

$$l = \frac{4l}{l+3}$$

donc $l^2 + 3l = 4l$ donc $l(l-1) = 0$ donc $l \in \{0; 1\}$.

2. On a

$$v_{n+1} = 1 - \frac{1}{u_{n+1}} = 1 - \frac{u_n + 3}{4u_n} = \frac{3u_n + 3}{4u_n} = \frac{3}{4} \frac{u_n + 1}{u_n} = \frac{3}{4} \left(1 + \frac{1}{u_n}\right) = \frac{3}{4} v_n$$

donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

3. Comme $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = 1 - \frac{1}{a}$ on a

$$v_n = \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

d'où

$$u_n = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

4. On a $\lim \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ donc $\lim u_n = 1$. Cette limite ne dépend pas de a .