

## Interrogation du 20/12/2000

*Durée de l'épreuve : 1 heure 15*

**L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les trois exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif.**

### Exercice I (6 points)

Résoudre, dans  $\mathbb{R}$ , l'équation suivante

$$|x + 2| + |2x - 3| = |x + 5|$$

### Exercice II (6 points)

En utilisant la définition de la limite, prouver que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{(-1)^n}{2^n} \right) = 1$$

### Exercice III (8 points)

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  donnée par

$$\begin{cases} u_0 & = a \\ u_{n+1} & = \frac{4u_n}{u_n+3} \end{cases}$$

où  $a$  est un réel, tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on ait  $u_n \neq -3$  et  $u_n \neq 0$ . (On ne cherchera pas à caractériser  $a$ ).

1. Montrer que si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a une limite  $l$  alors  $l \in \{0; 1\}$
2. Soit  $v_n = 1 - \frac{1}{u_n}$ . Montrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique. Préciser la raison et le premier terme.
3. En déduire le terme général de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
4. Quelle est la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ? Cette limite depend-elle de  $a$  ?