Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

Année 2000-2001
Semestre 2

Examen du 11/04/2001

Correction

Exercice I

Montrons que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

$$\begin{cases} A \cap B \subset A \\ A \cap B \subset B \end{cases}$$

Comme $E \subset F \Rightarrow \overline{E} \subset \overline{F}$ on en déduit

$$\begin{cases} \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \\ \overline{A \cap B} \subset \overline{B} \end{cases}$$

Ainsi

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$$

En revanche l'inclusion réciproque est fausse, comme le montre le contre-exemple suivant :

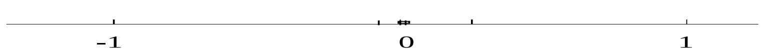
$$A =]-1, 0[, \quad B =]0, 1[$$

en effet

$$\overline{A} \cap \overline{B} = [-1, 0] \cap [0, 1] = \{0\}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$$

Exercice II

1. On a la graphe suivant



2. Une suite déléments de E peut ne pas être convergente comme le montre le contre-exemple suivant :

$$u_n = \begin{cases} -1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{2} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

qui est bien une suite d'éléments de E et qui n'a pas de limite.

3. Soit $x \in E$ alors x est isolé, en effet il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $]\frac{1}{(n+1)^2}, \frac{1}{(n-1)^2}[\cap E = \{x\}$. Ainsi $E^* = E$.

4. Soit $x \in E'$. Supposons $x > 0$ et posons $n = \mathrm{E}(\frac{1}{2\sqrt{x}})$. On a

$$\begin{array}{rcccl} n & \leq & \frac{1}{2\sqrt{x}} & < & n+1 \\ \frac{1}{4(n+1)^2} & \leq & x & < & \frac{1}{4n^2} \\ \frac{(-1)^{2n}}{(2(n+1))^2} & \leq & x & < & \frac{(-1)^{2n}}{(2n)^2} \end{array}$$

Or $x \notin E^*$ donc il n'existe pas d'entier p tel que $x = \frac{(-1)^p}{p^2}$, ainsi

$$\frac{(-1)^{2n}}{(2(n+1))^2} < x < \frac{(-1)^{2n}}{(2n)^2}$$

soit alors

$$\varepsilon = \min\{x - \frac{(-1)^{2n}}{(2(n+1))^2}, \frac{(-1)^{2n}}{(2n)^2} - x\}$$

on a $\varepsilon > 0$ et $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap E = \emptyset$ donc ce qui est en contradiction avec $x \in E'$. Ainsi $x \leq 0$.

De la même manière $x < 0$ entraine une contradiction ainsi $x \geq 0$, donc finalement $x = 0$. Ainsi : $E' \subset \{0\}$.

Reste à montrer que $\{0\} \subset E'$ c'est-à-dire que 0 est un point d'accumulation. Cela est immédiat car pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ contient $\frac{(-1)^n}{n^2} \in E$ avec $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

5. L'ensemble E n'est pas fermé puisque la suite $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ est une suite d'éléments de E qui converger vers $0 \notin E$. En outre

$$\overline{E} = E^* \cup E' = E \cup \{0\}$$

6. Soit $I = \mathbb{N}^*$ et

$$\forall n \in I,\ \Omega_n = \left]\frac{1}{(n+1)^2}, \frac{1}{(n-1)^2}\right[\cup \left]-\frac{1}{(n-1)^2}, -\frac{1}{(n+1)^2}\right[\text{si } n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$$

$$\Omega_1 = \left]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right[$$

Soit $y \in E$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$y = \frac{(-1)^n}{n^2}$$

or

$$\frac{(-1)^n}{n^2} \in \Omega_n$$

donc $y \in \cup_{n\in I}\Omega_n$. Ainsi

$$E \subset \cup_{n\in I}\Omega_n$$

Donc $(\Omega_n)_{n\in I}$ est un recouvrement de E par des ouverts. On ne peut pas en extraire de sous recouvrement fini, car

$$\frac{(-1)^n}{n^2} \notin \Omega_m$$

lorsque $n \neq m$.

7. L'ensemble E n'est pas compact car il n'est pas fermé. On pouvait aussi le déduire de la quesiton précédente car Borel-Lebesgue dit que de tout recouvrement d'un compact par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.

8. L'ensemble E n'est pas ouvert car $E \notin \mathcal{V}(-1)$. On a $\mathring{E} = \emptyset$ puisque $E = E^*$.

9. La frontière de E est $\partial E = \overline{E} \setminus \overset{\circ}{E} = E \cup \{0\}$.

Exercice III

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \overline{A}$ alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset$$

En particulier pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$, on a

$$]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset$$

donc $x \in A^n$.

2. Soit $y \in A^n$ alors

$$]y-\frac{1}{n}, y+\frac{1}{n}[\cap A \neq \emptyset$$

Soit alors x dans cette intersection, on a

$$y + \frac{1}{n} > x \quad \text{et} \quad y - \frac{1}{n} < x$$

donc

$$y \in]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}[$$

ainsi

$$y \in \cup_{x\in A}]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}[$$

donc

$$A^n \subset \cup_{x\in A}]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}[$$

Réciproquement, soit $y \in \cup_{x\in A}]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}[$ alors il existe $x \in A$ tel que $y \in \cup_{x\in A}]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}[$ donc $x + \frac{1}{n} > y$ et $x - \frac{1}{n} < y$ donc $]y-\frac{1}{n}, y+\frac{1}{n}[\cap A \neq \emptyset$ donc $y \in A^n$.

Conclusion :

$$A^n \subset \cup_{x\in A}]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}[$$

3. Selon la question précédente, A^n est une réunion d'ouverts. Donc A^n est un ouvert.

4. Selon la question 1, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $\overline{A} \subset A^n$ donc

$$\overline{A} = \cap_{n\in\mathbb{N}^*} A^n$$

5. Soit A un fermé. Alors $A = \overline{A}$. Selon la question précédente on a alors

$$A = \cap_{n\in\mathbb{N}^*} A^n$$

Selon la question 3, tous les A^n sont des ouverts. Par ailleurs $\mathbb{N}^*$ est dénombrable, en consquence A est l'intersection dénombrable d'enembles fermés.

Cela n'est plus vrai si on remplace dénombrable par fini. Il suffit de prendre comme contre exemple n'importe quel fermé qui n'est pas ouvert (c'est-à-dire n'importe quel fermé qui n'est ni $\mathbb{R}$ ni $\emptyset$) en effet l'intersection finie d'ouverts est un ouvert.