Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2000-2001
CS 103 – Analyse I — Semestre 2

Examen du 11/04/2001

Durée de l'épreuve : 2 heures

Ce sujet est recto-verso. L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les trois exercices sont indépendants. Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées et rédigées. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice I (4 points)

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Comparer $\overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B}$.

Exercice II (9 points)

On considère l'ensemble

$$E = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

1. Représenter graphiquement l'ensemble E

2. Toute suite d'éléments de E est-elle forcément convergente ?

3. Déterminer E^*

4. Démontrer que $E' \subset \{0\}$ puis en déduire E'

5. L'ensemble E est-il fermé ? Quelle est son adhérence ?

6. Peut-on trouver un recouvrement de E par des ouverts, dont on ne peut pas extraire un sous-recouvrement fini ?

7. L'ensemble E est-il compact ? Peut-on déduire la réponse à cette question, de la réponse à la question précédente ?

8. L'ensemble E est-il ouvert ? Quel est son interieur ?

9. Déterminer la frontière de E.

Exercice III (7 points)

Pour tout ensemble $A \subset \mathbb{R}$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on note

$$A^n = \left\{ x \in \mathbb{R},\ \left]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[\cap A \neq \emptyset \right\}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \overline{A} \subset A^n$

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = \cup_{x \in A}]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A^n est un ouvert

4. Montrer que $\overline{A} = \cap_{n \in \mathbb{N}^*} A^n$

5. Montrer que tout fermé est l'intersection dénombrable d'ouverts. Cela est-il encore vrai si on remplace "dénombrable" par "fini" ?