

Examen du 24/01/2001

Correction

Exercice I

Soit x_1, \dots, x_n et y_1, \dots, y_n des réels, alors

$$\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + \dots + (x_n + y_n)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}$$

par exemple

$$\sqrt{(1+3)^2 + (2+3)^2} \leq \sqrt{1^2 + 2^2} + \sqrt{3^2 + 3^2}$$

Cela démontre que

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

pour $u = (1; 2)$ et $v = (3; 3)$.

Exercice II

1. Considérons la fonction f définie de $[-1; +\infty[$ dans \mathbb{R} par $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}$. Elle est dérivable et

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+1}\sqrt{x+2}}$$

comme $\sqrt{x+1} < \sqrt{x+2}$ il vient que $f'(x) < 0$. Donc f est strictement décroissante. Il en résulte que $u_n = f(n)$ définit une suite décroissante.

2. Multiplions par l'expression conjuguée.

$$u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$$

or $\lim(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}) = +\infty$ donc $\lim u_n = 0$.

3. Soit (H_n) l'hypothèse $v_n = \sqrt{n+1}$.

- $v_0 = 1$ donc (H_0) est vraie.
- Supposons (H_n) vraie alors

$$v_n = \sqrt{n+1}$$

or $v_{n+1} = v_n + u_n$ donc $v_{n+1} = \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$ d'où

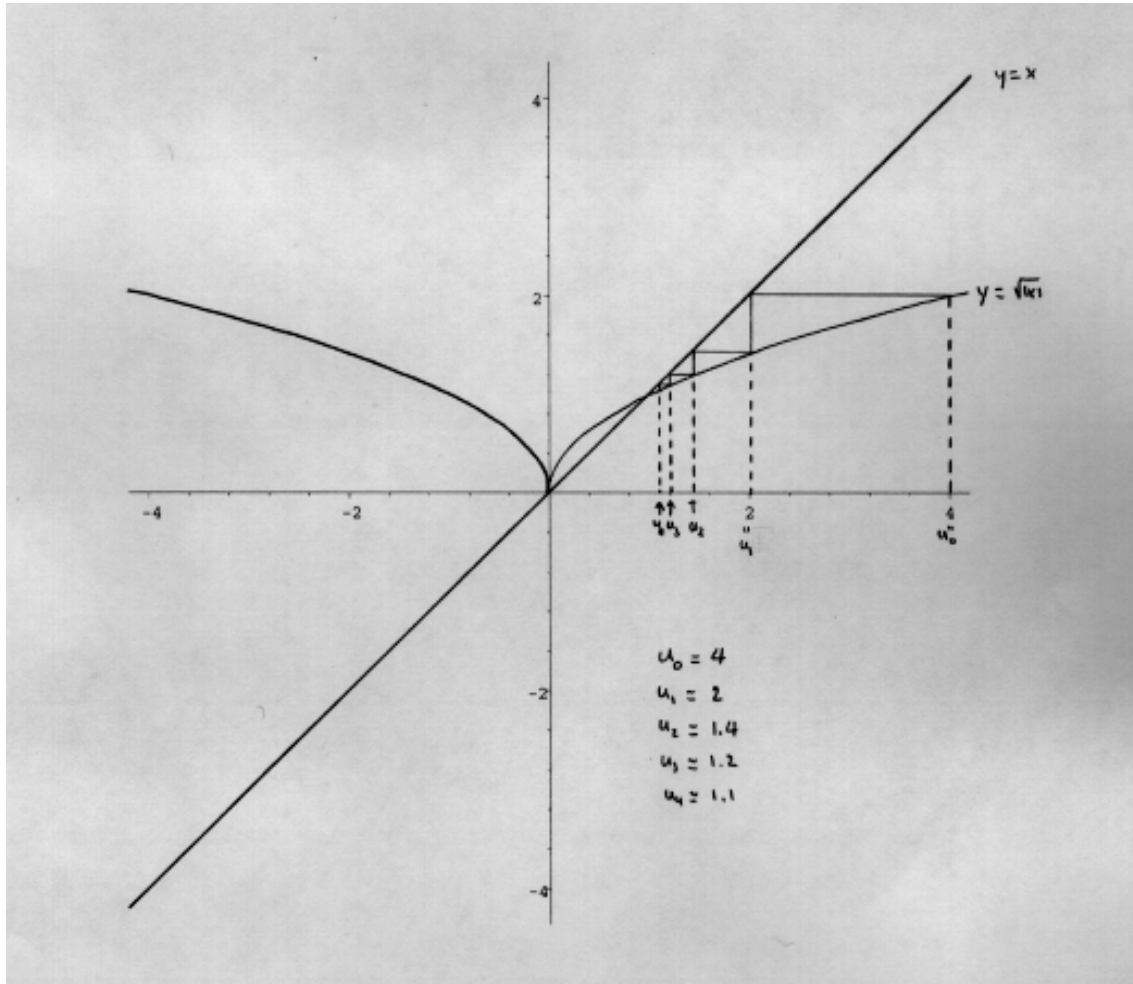
$$v_{n+1} = \sqrt{(n+1)+1}$$

donc (H_{n+1}) est établi.

4. Par définition de v_n on a $v_n = 1 + u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$. et donc $u_0 + u_1 + \dots + u_n = v_{n+1} - 1$. Or $\lim v_{n+1} - 1 = +\infty$ donc $\lim(u_0 + u_1 + \dots + u_n) = +\infty$.

Exercice III

1.



2. Les équilibres sont les réels l tels que $l^2 = |l|$. Comme $l^2 \geq 0$ cela équivaut à $l^2 = l$ c'est-à-dire à $l \in \{0; 1\}$. Les équilibres sont donc 0 et 1.

3. 1 est un équilibre stable puisque les suites issues de conditions initiales dans $]0, 2[$ convergent vers 0. En revanche 0 est un équilibre instable puisque les suites issues de conditions initiales différentes de 0 ne convergent pas vers 0.

Exercice IV

Première méthode : u_n est la somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$. Ainsi

$$u_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

donc $\lim u_n = 2$. Comme (u_n) converge, elle est de Cauchy.

Deuxième méthode :

$$\begin{aligned} |u_q - u_p| &= \frac{1}{2^q} + \frac{1}{2^{q-1}} + \dots + \frac{1}{2^p} \\ &\leq \frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{q-p}}{2^q} \end{aligned}$$

Or $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{q-p} = 2^{q-p+1} - 1$ donc

$$\begin{aligned} |u_q - u_p| &\leq \frac{2^{q-p+1} - 1}{2^q} \\ &\leq \frac{2^{q-p+1}}{2^q} \\ &\leq \frac{1}{2^{p-1}} \\ &\leq \frac{1}{2^{N-1}} \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $N = E\left(\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2}\right) + 2$ et soient p et q tels que $q \geq p \geq N$. Ce qui précède montre que $|u_q - u_p| < \varepsilon$. Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, q \geq p > N \Rightarrow |u_q - u_p| < \varepsilon$$

donc la suite est de Cauchy

Exercice V

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ xy = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} X + Y = 8 \\ XY = 16 \\ X = x^2 \\ Y = y^2 \\ xy \geq 0 \end{cases}$$

Or $X + Y = 8$ et $XY = 16$ équivaut à X et Y sont solutions de $r^2 - 8r + 16 = 0$. Ce trinôme a 4 comme racine double. Ainsi le système équivaut à

$$\begin{cases} X = Y = 4 \\ X = x^2 \\ Y = y^2 \\ xy \geq 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire à

$$\begin{cases} x = 2 \text{ ou } x = -2 \\ y = 2 \text{ ou } y = -2 \\ xy \geq 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire à $x = y = 2$ ou $x = y = -2$. Ainsi l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{(-2; -2); (2; 2)\}$.