Examen du 24/01/2001

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les cinq exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice I (3 points)

Rappeler l'inégalité de Minkowski et donner un exemple.

Exercice II (6 points)

On considère $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle croissante ?

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

3. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = v_n + u_n$. Montrer par récurrence que $v_n = \sqrt{n+1}$.

4. En déduire $\lim(u_0 + \cdots + u_n)$.

Exercice III (5 points)

On considère la relation de recurrence $u_{n+1} = \sqrt{|u_n|}$

1. Au moyen d'un graphe, donner les 5 premiers termes de la suite issue de la condition initiale $u_0 = 4$.

2. Trouver les équilibres de la relation de récurrence.

3. Au moyen du graphe dites pour chaque équilibre s'il est stable ou non. Expliquez

Exercice IV (3 points)

On considère

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Exercice V (3 points)

Trouver tous les réels x et y qui vérifient simultanément $x^2 + y^2 = 8$ et $xy = 4$.