

Devoir du 9/3/2001

Correction

Exercice I

Tout ensemble A est la réunion des singletons qui le constituent, c'est-à-dire $A = \cup_{x \in A} \{x\}$ or un singleton $\{x\}$ un ensemble fermé, donc tout ensemble est réunion d'ensembles fermés.

Exercice II

1. L'ensemble A_n n'est pas toujours ouvert, par exemple, pour $A = [0, 2]$ et $n = 1$. En effet $x \in A_1$ équivaut à $[x - 1, x + 1] \subset A$ ce qui équivaut à $x - 1 \geq 0$ et $x + 1 \leq 2$ ce qui équivaut à $x = 1$. Donc $A_1 = \{1\}$ qui n'est pas ouvert.

2. L'ensemble A_n n'est pas toujours fermé, par exemple, pour $A =]0, 3[$ et $n = 1$. En effet $x \in A_1$ équivaut à $[x - 1, x + 1] \subset A$ ce qui équivaut à $x - 1 > 0$ et $x + 1 < 2$ ce qui équivaut à $x \in]1, 2[$. Donc $A_1 =]1, 2[$ qui n'est pas fermé.

3. Soit $x \in A_n$ alors $[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}] \subset A$, or $]x - \frac{1}{2n}, x + \frac{1}{2n}[\subset [x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]$ donc

$$]x - \frac{1}{2n}, x + \frac{1}{2n}[\subset A$$

donc A est voisinage de x ce qui implique $x \in \overset{\circ}{A}$. Il en résulte $\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n \subset \overset{\circ}{A}$.

4. Soit $x \in \cup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in A_{n_0}$. La question précédente donne alors $x \in \overset{\circ}{A}$. Cela prouve que $\cup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n \subset \overset{\circ}{A}$.

5. Considérons $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \overline{A_n}$ alors il existe une suite convergente (y_p) d'éléments de A_n qui converge vers x . Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathbb{N}, p > P \Rightarrow |y_p - x| < \varepsilon$$

donc pour $\varepsilon = \frac{1}{2n}$, il existe un rang P à partir duquel $y_p - \frac{1}{2n} < x < y_p + \frac{1}{2n}$, il en résulte

$$y_p - \frac{1}{n} < x - \frac{1}{2n} < x < x + \frac{1}{2n} < y_p + \frac{1}{n}$$

comme $[y_p - \frac{1}{n}, y_p + \frac{1}{n}] \subset A$ on en déduit $]x - \frac{1}{2n}, x + \frac{1}{2n}[\subset A$, donc A est voisinage de x . Ainsi $x \in \overset{\circ}{A}$. De manière analogue à la question 4, on a alors $\cup_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{A_n} \subset \overset{\circ}{A}$. Par ailleurs, soit $x \in \overset{\circ}{A}$ alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A$ donc

$$\left[x - \frac{1}{\mathbb{E}(\frac{1}{\varepsilon}) + 1}, x + \frac{1}{\mathbb{E}(\frac{1}{\varepsilon}) + 1} \right] \subset A$$

donc $x \in A_{\mathbb{E}(\frac{1}{\varepsilon}) + 1} \subset \overline{A_{\mathbb{E}(\frac{1}{\varepsilon}) + 1}}$.

6. Soit A un ouvert, alors $A = \overset{\circ}{A}$ donc $A = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{A_n}$. Comme \mathbb{N} est dénombrable et que $\overline{A_n}$ est un fermé, on en déduit que A est réunion dénombrable de fermés.