Pôle Universitaire Léonard de Vinci | Année 2000-2001
CS 103 – Analyse I | Semestre 2

Devoir à rendre le 9/3/2001

Décomposition d'un ouvert en fermés

Le but de ce devoir est de montrer que tout ensemble ouvert est la réunion dénombrable d'ensembles fermés.

Exercice I

Montrer qu'il est trivial que tout ensemble (et *a fortiori* ouvert) est la réunion de fermés.

Exercice II

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Pour tout entier n non nul on note

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R},\ \left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right] \subset A \right\}$$

1. A_n est-il toujours ouvert ? Donnez une démonstration ou un contre exemple.

2. A_n est-il toujours fermé ? Donnez une démonstration ou un contre exemple.

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n \subset \mathring{A}$.

4. Montrer que $\cup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n \subset \mathring{A}$

5. Montrer que $\cup_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{A_n} = \mathring{A}$

6. En déduire que tout ensemble ouvert est la réunion dénombrable d'ensembles fermés.