Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2000-2001
CS 103 – Analyse I — Semestre 2

Devoir du 23/02/2001

Correction

Exercice I

1. Soient A_1 et A_2 deux ouverts de $\mathbb{R}$.

- Si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ alors $\forall x \in A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap A_2$ est voisinage de x (en effet $\forall x \in \emptyset$ toute propriété est vraie)
- Si $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ alors soit $x \in A_1 \cap A_2$. Comme A_1 est un ouvert et que $x \in A_1$, il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que $]x - \varepsilon_1, x + \varepsilon[\subset A_1$.

  De même $\exists \varepsilon_2 > 0$ tel que $]x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2[\subset A_1$.

  Soit $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. On a $\varepsilon > 0$ et $]x - \varepsilon, x + \varepsilon_1[\subset A_1 \cap A_2$. Ainsi $A_1 \cap A_2$ est voisinage de x.

  On a démontré que $A_1 \cap A_2$ est voisinage de chacun de ses points. Il est donc ouvert.

2. Soit (H_n) l'hypothèse "l'intersection de n ouverts est un ouvert".

- La question précédente montre que (H_2) est vraie.
- Soit $n \geq 2$. Supposons que (H_n) soit vérifiée.

  Soient $A_1, \ldots, A_{n+1}$, n ouverts. Par (H_n) on a $A = A_1 \cap \ldots \cap A_n$ ouvert. En outre $A \cap A_n$ est un ouvert grace à la question précédente. Donc $A_1 \cap \ldots \cap A_{n+1}$ est un ouvert. Donc H_{n+1} est vraie

En conclusion, l'intersection de n ouverts est un ouvert.

3. Pour tout entier naturel non nul n, on note A_n l'ensemble ouvert $]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$. On a

$$\cap_{n=1}^{+\infty} A_n = \{0\}$$

en effet : il est clair que $\{0\} \subset \cap_{n=1}^{+\infty} A_n$. Réciproquement, soit $a \neq 0$, on a $a \notin A_{\mathrm{E}(\frac{1}{a})+1}$ donc $a \notin \cap_{n=1}^{+\infty} A_n$.

Exercice II

Soit (A_i) une famille d'ouverts. Soit $x \in \cup_i A_i$. Il existe en entier i_0 tel que $x \in A_{i_0}$, comme cet ensemble est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A_{i_0}$. Donc $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset \cup_i A_i$. Donc $\cup_i A_i$ est voisinage de x. En conséquence $\cup_i A_i$ est voisinage de chacun de ses points : c'est un ouvert.

Exercice III

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $]x-1, x+1[\subset \mathbb{R}$ donc $\mathbb{R}$ est voisinage de x. Ainsi $\mathbb{R}$ est un ouvert.

2. Pour tout $x \in \emptyset$ on a $]x-1, x+1[\subset \emptyset$ puisqu'il n'y a pas d'élément dans $\emptyset$. Ainsi $\emptyset$ est un ouvert.