Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2000-2001
CS 103 – Analyse I — Semestre 1

Devoir du 11/01/2001

correction

Exercice I

1. On a

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ u_n \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{bmatrix}$$

On pose donc

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Appliquons la méthode de Gauss-Jordan sur la matrice augmentée.

$$P' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On a alors

$$E_1P' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_2E_1P' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$E_3E_2E_1P' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/4 & -1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le cours d'algèbre nous permet de conclure que

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire

$$P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

3. On a

$$AP = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

donc

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = J$$

4.

a . On a

$$DN = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$ND = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donc $DN = ND$.

b . Soit (H_n) l'hypothèse

$$D^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

alors

- (H_1) est vraie
- Supposons (H_n) vraie, alors

  $$D^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  donc

  $$D^{n+1} = DD^n = D \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  donc (H_{n+1}) est vraie.

Ainsi on a étblit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c . Le calcule donne

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donc pour tout entier $n \geq 2$ on a

$$N^n = N^2 N^{n-2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} N^{n-2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d . Comme $DN = ND$ on peut appliquer le binôme de Newton, il vient

$$J^n = (D+N)^n = D^n + nD^{n-1}N + BN^2$$

où B est une matrice 3×3 qu'il n'est pas utile de calculer puisque $BN^2 = 0$. Ainsi

$$J^n = (D+N)^n = D^n + nD^{n-1}N$$

Or $A = PJP^{-1}$ donc $A^n = PJP^{-1}PJP^{-1} \dots PJP^{-1}$. Comme $PP^{-1} = I$ il vient finalement que $A^n = PJ^nP^{-1}$ ce qui donne

$$A^n = P(D^n + nD^{n-1}N)P^{-1}$$

5. Il s'agit de calculer explicitement $D^n + nD^{n-1}N$ puis de faire le produit matriciel avec P et P^{-1}. On a

$$D^{n-1} = \begin{bmatrix} (-1)^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(-1)^{n} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donc

$$D^{n-1}N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ainsi

$$D^n + nD^{n-1}N = \begin{bmatrix} (-1)^{n} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

il vient

$$(D^n + nD^{n-1}N)P^{-1} = \begin{bmatrix} (-1)^{n} & -2(-1)^n & (-1)^n \\ 1+2n & 2 & 1-2n \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

donc

$$A^n = P(D^n + nD^{n-1}N)P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} (-1)^n + 2n + 3 & -2(-1)^n + 2 & (-1)^n - 2n - 1 \\ -(-1)^n + 2n + 1 & 2(-1)^n + 2 & (-1)^n - 2n + 1 \\ (-1)^n + 2n - 1 & -2(-1)^n + 2 & (-1)^n - 2n + 3 \end{bmatrix}$$

6. Pour tout entier $n \geq 2$ on a $X_n = A^{n-2}X_2$. Comme

$$X_2 = \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix}$$

et

$$A^{n-2} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} (-1)^n + 2n - 1 & -2(-1)^n + 2 & (-1)^n - 2n + 3 \\ -(-1)^n + 2n - 3 & 2(-1)^n + 2 & (-1)^n - 2n + 3 \\ (-1)^n + 2n - 5 & -2(-1)^n + 2 & (-1)^n - 2n + 7 \end{bmatrix}$$

il vient

$$X_n = \begin{bmatrix} \left(\frac{(-1)^n}{4} + \frac{3}{4} - \frac{n}{2}\right) a + \left(\frac{1}{2} - \frac{(-1)^n}{2}\right) b + \left(\frac{(-1)^n}{4} - \frac{1}{4} + \frac{n}{2}\right) c \\ \left(\frac{(-1)^n}{4} - \frac{n}{2} + \frac{3}{4}\right) a + \left(-\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2}\right) b + \left(-\frac{(-1)^n}{4} + \frac{2}{n} - \frac{3}{n}\right) c \\ \left(\frac{(-1)^n}{4} - \frac{n}{2} + \frac{7}{2}\right) a + \left(\frac{1}{2} - \frac{(-1)^n}{2}\right) b + \left(\frac{(-1)^n}{2} + \frac{n}{2} - \frac{5}{2}\right) c \end{bmatrix}$$

Exercice II

1. La question 6 de l'exercice I donne

$$u_n = \left(\frac{(-1)^n}{4} + \frac{3}{4} - \frac{n}{2}\right) a + \left(\frac{1}{2} - \frac{(-1)^n}{2}\right) b + \left(\frac{(-1)^n}{4} - \frac{1}{4} + \frac{n}{2}\right) c$$

En effet, il suffit de considérer la première coordonnée du vecteur X_n.

2. Soit (H_n) l'hypothèse de récurrence

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_n & = & \left(\frac{(-1)^n}{4}+\frac{3}{4}-\frac{n}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}-\frac{(-1)^n}{2}\right)b+\left(\frac{(-1)^n}{4}-\frac{1}{4}+\frac{n}{2}\right)c \\ u_{n-1} & = & \left(\frac{-(-1)^n}{4}+\frac{3}{4}-\frac{n-1}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}-\frac{-(-1)^n}{2}\right)b+\left(\frac{-(-1)^n}{4}-\frac{1}{4}+\frac{n-1}{2}\right)c \\ u_{n-2} & = & \left(\frac{(-1)^n}{4}+\frac{3}{4}-\frac{n-2}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}-\frac{(-1)^n}{2}\right)b+\left(\frac{(-1)^n}{4}-\frac{1}{4}+\frac{n-2}{2}\right)c \end{array}\right.$$

on a

- (H_2) est vraie car

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & \left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)a+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)b+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)c=a \\ u_1 & = & \left(\frac{-1}{4}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}-\frac{-1}{2}\right)b+\left(\frac{-1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)c=b \\ u_2 & = & \left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-\frac{2}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)b+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{2}{2}\right)c=c \end{array}\right.$$

- Soit $n \geq 2$. Supposons (H_n) alors, en utilisant que $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}-u_{n-2}$ il vient

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & \left(\frac{(-1)^n}{4}+\frac{3}{4}-\frac{n}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}-\frac{(-1)^n}{2}\right)b+\left(\frac{(-1)^n}{4}-\frac{1}{4}+\frac{n}{2}\right)c \\ & & +\left(\frac{-(-1)^n}{4}+\frac{3}{4}-\frac{n-1}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}-\frac{-(-1)^n}{2}\right)b+\left(\frac{-(-1)^n}{4}-\frac{1}{4}+\frac{n-1}{2}\right)c \\ & & +\left(\frac{(-1)^n}{4}+\frac{3}{4}-\frac{n-2}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}-\frac{(-1)^n}{2}\right)b+\left(\frac{(-1)^n}{4}-\frac{1}{4}+\frac{n-2}{2}\right)c \\ u_n & = & \left(\frac{(-1)^n}{4}+\frac{3}{4}-\frac{n}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}-\frac{(-1)^n}{2}\right)b+\left(\frac{(-1)^n}{4}-\frac{1}{4}+\frac{n}{2}\right)c \\ u_{n-1} & = & \left(\frac{-(-1)^n}{4}+\frac{3}{4}-\frac{n-1}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}-\frac{-(-1)^n}{2}\right)b+\left(\frac{-(-1)^n}{4}-\frac{1}{4}+\frac{n-1}{2}\right)c \end{array}\right.$$

  donc

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & \left(\frac{(-1)^n}{4}+\frac{3}{4}-\frac{n}{2}+\frac{-(-1)^n}{4}+\frac{3}{4}-\frac{n-1}{2}-\frac{(-1)^n}{4}-\frac{3}{4}+\frac{n-2}{2}\right)a \\ & & +\left(\frac{1}{2}-\frac{(-1)^n}{2}+\frac{1}{2}-\frac{-(-1)^n}{2}-\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{2}\right)b \\ & & +\left(\frac{(-1)^n}{4}-\frac{1}{4}+\frac{n}{2}+\frac{-(-1)^n}{4}-\frac{1}{4}+\frac{n-1}{2}-\frac{(-1)^n}{4}+\frac{1}{4}-\frac{n-2}{2}\right)c \\ u_n & = & \left(\frac{(-1)^n}{4}+\frac{3}{4}-\frac{n}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}-\frac{(-1)^n}{2}\right)b+\left(\frac{(-1)^n}{4}-\frac{1}{4}+\frac{n}{2}\right)c \\ u_{n-1} & = & \left(\frac{-(-1)^n}{4}+\frac{3}{4}-\frac{n-1}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}-\frac{-(-1)^n}{2}\right)b+\left(\frac{-(-1)^n}{4}-\frac{1}{4}+\frac{n-1}{2}\right)c \end{array}\right.$$

  donc

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & \left(\frac{(-1)^{n+1}}{4}+\frac{3}{4}-\frac{n+1}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}-\frac{(-1)^{n+1}}{2}\right)b+\left(\frac{(-1)^{n+1}}{4}-\frac{1}{4}+\frac{n+1}{2}\right)c \\ u_n & = & \left(\frac{(-1)^n}{4}+\frac{3}{4}-\frac{n}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}-\frac{(-1)^n}{2}\right)b+\left(\frac{(-1)^n}{4}-\frac{1}{4}+\frac{n}{2}\right)c \\ u_{n-1} & = & \left(\frac{-(-1)^n}{4}+\frac{3}{4}-\frac{n-1}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}-\frac{-(-1)^n}{2}\right)b+\left(\frac{-(-1)^n}{4}-\frac{1}{4}+\frac{n-1}{2}\right)c \end{array}\right.$$

  ce qui établit (H_{n+1}).

On a donc (H_n) pour tout $n \geq 2$. Ainsi, en particulier, on a

$$u_n=\left(\frac{(-1)^n}{4}+\frac{3}{4}-\frac{n}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}-\frac{(-1)^n}{2}\right)b+\left(\frac{(-1)^n}{4}-\frac{1}{4}+\frac{n}{2}\right)c$$

3. Regroupons les termes

$$u_n=\left(\frac{a}{4}-\frac{b}{2}+\frac{c}{4}\right)(-1)^n+\left(-\frac{a}{2}+\frac{c}{2}\right)n+\left(\frac{3}{4}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{4}c\right)$$

Pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admette une limite réelle il faut et il suffit que

$$\begin{cases} a - 2b + c = 0 \\ a = c \end{cases}$$

dans ce cas on a

$$a = b = c$$

donc $u_n = a$. La suite est constante, ainsi sa limite est a.

Pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers $+\infty$ il faut et il suffit que $c > a$.

Pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers $-\infty$ il faut et il suffit que $c < a$.

4. Dans cette question on a

$$u_n = \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right)(-1)^n + \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)$$

On note $T = (\frac{a}{2} - \frac{b}{2})$ et $S = (\frac{a}{2} + \frac{b}{2})$.

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |v_n - l| < \varepsilon$$

Comme $T \neq 0$ on peut prendre $\varepsilon = |\frac{T}{2}|$ alors $|v_n - l| < \varepsilon$ ne peut pas être satisfaite si $(-1)^{\varphi(n)}$ change de signe. Il est donc nécessaire que $\varphi(n)$ soit toujours pair ou impair à partir d'un certain rang.

Cette condition est suffisante puisqu'alors $v_n = T + S$ ou a $v_n - T + S$ donc la suite est constante. Sa limite est soit $T + S = a$ ou $-T + S = b$.

5. En utilisant le regroupement de termes de la question 3 il vient

$$u_{n+1} - u_n = \frac{c-a}{2} - \frac{a+c-2b}{2}(-1)^n$$

- Si $c - a > 0$ alors
  - Si $\frac{a+c-2b}{2} \leq \frac{c-a}{2}$, c'est-à-dire si $a \leq b$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
  - Si $\frac{a+c-2b}{2} \leq \frac{c-a}{2}$, c'est-à-dire si $a > b$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone
- Si $c - a = 0$ alors
  - Si $\frac{a+c-2b}{2} = 0$, c'est-à-dire si $a = b = c$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante
  - Si $\frac{a+c-2b}{2} \neq 0$, c'est-à-dire si $b \neq a$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone
- Si $c - a < 0$ alors
  - Si $\frac{a+c-2b}{2} \leq \frac{a-c}{2}$, c'est-à-dire si $c \leq b$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
  - Si $\frac{a+c-2b}{2} \leq \frac{a-c}{2}$, c'est-à-dire si $c > b$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone