Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2000-2001
CS 103 – Analyse I — Semestre 1

Devoir à rendre le 11/01/2001

Suites récurrentes - Approche matricielle

Soient a, b et c trois réels. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_1 = b \\ u_2 = c \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1} - u_{n-2} \text{ pour } n \geq 2 \end{cases}$$

Dans ce devoir, on se propose d'étudier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice I

On considère la matrice P et, pour tout $n \geq 2$, le vecteur X_n définis par

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad X_n = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{bmatrix}$$

1. Trouver une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$.

2. Calculer P^{-1}

3. Notons $J = P^{-1}AP$. Montrer que

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. On note

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a . Montrer que $DN = ND$

b . Calculer D^n pour tout entier $n \geq 1$.

c . Montrer que N^2 est la matrice nulle. En déduire N^n pour tout entier $n \geq 2$

d . Montrer que $J^n = D^n + nD^{n-1}N$. En déduire que $A^n = P(D^n + nD^{n-1}N)P^{-1}$.

5. En déduire l'expression de A^n pour tout entier $n \geq 2$.

6. En déduire X_n en fonction de a, b c et n pour tout $n \geq 2$.

Exercice II

1. En utilisant l'exercice I, montrer que

$$u_n = \left(\frac{(-1)^n}{4} + \frac{3}{4} - \frac{n}{2}\right) a + \left(\frac{1}{2} - \frac{(-1)^n}{2}\right) b + \left(\frac{(-1)^n}{4} - \frac{1}{4} + \frac{n}{2}\right) c \qquad (1)$$

2. Donner une nouvelle démontration de (1) en procédant par récurrence.

3. A quelle condition sur a, b et c, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet-elle une limite ? La calculer en fonction de a, b et c.

4. Dans cette question on suppose que $a = c$ et $b \neq 2a + 2c$. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors sa limite est a ou b.

5. Discuter la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de a, b et c.