

## Devoir à rendre le 14/12/2000

### *Suites homographiques*

Soient  $a, b, c$  et  $d$  quatre réels, et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}, \text{ si elle existe} \end{cases}$$

on se propose d'étudier  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , appelée *suite homographique*.

### Exercice I

Dans cet exercice on étudie deux cas particuliers.

1. On suppose que  $ad - bc = 0$ , montrer que la suite homographique est constante à partir du second terme.

2. On suppose que  $c = 0$ .

a . On pose  $v_n = u_n - \alpha$ . Montrer que si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas arithmétique alors il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique.

b . Expliciter  $u_n$  est fonction de  $n$

c . En déduire le sens de variation et la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

### Exercice II

On suppose désormais que  $ad - bc \neq 0$  et  $c \neq 0$ . Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} &\rightarrow \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\} \\ x &\mapsto \frac{ax + b}{cx + d} \end{aligned}$$

1. Montrer que  $f$  est une bijection

2. Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , définie par  $v_0 = -\frac{d}{c}$  et  $v_{n+1} = f^{-1}(v_n)$ . Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \neq v_n$$

3. Montrer que si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une limite  $l \in \mathbb{R}$  alors

$$cl^2 + (d - a)l - b = 0 \tag{1}$$

On note  $\Delta = (d - a)^2 + 4bc$

4. Dans cette question on suppose que  $\Delta > 0$ . Soient  $\alpha$  et  $\beta$  les deux racines de (1).

a . Montrer que si  $u_0 \in \{\alpha, \beta\}$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est stationnaire.

b . On suppose  $u_0 \notin \{\alpha, \beta\}$ , et on pose

$$U_n = \frac{u_n - \beta}{u_n - \alpha} \quad \text{et} \quad q = \frac{c\alpha + d}{c\beta + d}$$

montrer que  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $q$ .

c . En déduire le terme général de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

5. Dans cette question on suppose que  $\Delta = 0$ . Soit  $\alpha$  la racine de (1).

a . Montrer que si  $u_0 = \alpha$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est stationnaire.

b . On suppose  $u_0 \neq \alpha$ , et on pose

$$U_n = \frac{1}{u_n - \alpha} \quad \text{et} \quad r = \frac{2c}{a + d}$$

montrer que  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique de raison  $r$ .

c . En déduire le terme général de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

6. Dans cette question on suppose que  $\Delta < 0$ . Quel effet cette hypothèse a-t-elle sur la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?

### Exercice III

Etudier la limite des suites suivantes

1.  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{-u_n + 2}$

2.  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 2}$

3.  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$