Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2000-2001
CS 103 – Analyse I — Semestre 1

Devoir du 28/11/2000

correction

Exercice I

1. Trivial, il suffit de prendre $\phi(n) = n$.

2. Soit ϕ l'application de $\mathbb{N}$ dans l'ensemble des nombres pairs positifs, définie par $\phi(n) = 2n$.

- L'application ϕ est injective puisque $\phi(n) = \phi(m)$ entraine $2n = 2m$ et donc $n = m$.
- L'application ϕ est surjective puisque tout nombre pair est divisible par 2 et peut donc s'écrire $2n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi ϕ est bijective donc l'ensemble des nombres pairs est dénombrable.

Remarque : si on souhaite établir une bijection avec l'ensemble des nombres pairs positifs ou négatifs, il suffit de considérer

$$\phi(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ -n-1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

on démontre de la même manière que ϕ est une bijection.

3.

L'idée est la suivante : les éléments de E peuvent être numérotés car E est dénombrable. On renumérote ses éléments en commençant par les éléments de F. Comme F est infini, on aura finalement une bijection de $\mathbb{N}$ dans F.

Rédaction de l'idée : Comme E est dénombrable, il existe une bijection $\phi : \mathbb{N} \to E$. On définit alors la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et l'application $\psi : \mathbb{N} \to F$ par $u_0 = 0$ et pour $k \in \mathbb{N}$

$$u_{k+1} = \begin{cases} u_k & \text{si } \phi(u_k) \notin F \\ u_k + 1 & \text{si } \phi(u_k) \in F \quad \text{on pose alors } \psi(u_k) = \phi(k) \end{cases}$$

Soit $y \in F$ alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $y = \phi(k)$ or F est infini donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $k = u_n$, il en résulte que $y = \psi(k)$. Ainsi ψ est surjective. L'injectivité de ψ résulte de celle de ϕ. Ainsi ψ est bijective. En conséquence, F est dénombrable.

4.

L'idée est la suivante : Comme les éléments de E et F sont numérotables on numérote les éléments de $E \cup F$ en alternance. Afin d'éviter de numéroter deux fois les éléments de $E \cap F$ on considère F' qui est l'ensemble des éléments de F non contenus dans E. On écarte immédiatement le cas trivial ou F' est un ensemble fini.

Rédaction de l'idée : Soit $F' = F \setminus E$ alors $E \cup F = E \cup F'$ avec $E \cap F' = \emptyset$.

- Premier cas : F' est fini, soit p son cardinal. On ordonne les éléments de F'. Pour n entre 0 et $p-1$ on pose $\psi(n)$ égal au n-ième élement de F'. Pour $n \geq p$ on pose $\psi(n) = \phi(n-p)$. L'application ψ réalise bien une bijection de $\mathbb{N}$ dans $E \cup F$.

- Deuxième cas : F' est infini. Comme $F' \subset F$, il est dénombrable (*cf.* question 3). Donc, il existe une bijection ϕ_1 de $\mathbb{N}$ dans F'. Comme E est dénombrable, il existe aussi une application bijective ϕ_2 de $\mathbb{N}$ dans E. On défini alors

$$\begin{array}{rcl} \phi\,:\,\mathbb{N} & \to & E \cup F \\ n & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \phi_1\left(\frac{n}{2}\right) & \text{si n est pair} \\ \phi_2\left(\frac{n-1}{2}\right) & \text{si n est impair} \end{array} \right. \end{array}$$

  Injectivité de ϕ : soit a et b tels que $\phi(a) = \phi(b)$. Comme $E \cap F' = \emptyset$ soit $\phi(a) = \phi(b) \in E$, soit $\phi(a) = \phi(b) \in F'$. Dans la première hypothèse l'injectivité de ϕ résulte de l'injectivité de ϕ_2, dans la seconde hypothèse de celle de ϕ_1.

  Surjectivité de ϕ : soit $y \in E \cup F$ alors soit $y \in E$ soit $y \in F'$. Dans la première hypothèse, il existe un entier p tel que $y = \phi_2(p)$ et donc $y = \phi(2p)$. Dans la première hypothèse, il existe un entier p tel que $y = \phi_1(p)$ et donc $y = \phi(2p+1)$. Ainsi ϕ est surjective.

  En conclusion ϕ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $E \cup F$, donc $E \cup F$ est dénombrable.

5. Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}^-$ sont en bijection (il suffit de prendre $\psi(n) = -n$) donc $\mathbb{Z}^-$ est dénombrable. La question 4 permet de conclure que $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \mathbb{N}$ est dénombrable.

Exercice II

1.

Injectivité. Soit (p, q) et (p', q') deux éléments de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que $f(p, q) = f(p', q')$ alors $(2p+1)2^q = (2p'+1)2^{q'}$ donc

$$(2p+1)2^{q-q'} = 2p'+1 \tag{1}$$

Or $2p'+1$ est impair donc l'exposant de 2 dans le membre de gauche est 0. Ainsi $q = q'$. L'équation (1) devient $2p+1 = 2p'+1$ ce qui entraine $p = p'$. Ainsi $(p, q) = (p', q')$, donc f est injective.

Surjectivité. Soit $y \in \mathbb{N}^*$. On note q l'exposant de 2 dans la décomposition de y en facteurs premiers (si y est impair alors $q = 0$). Le nombre entier $\frac{y}{2^q}$ est impair, donc $\frac{y}{2^q} - 1$ est pair. Notons

$$p = \frac{\frac{y}{2^q} - 1}{2}$$

On a bien $y = f(p, q)$ avec $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ donc f est surjective.

Ainsi f réalise bien une bijection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$. Comme $\mathbb{N}^*$ est en bijection avec $\mathbb{N}$ par $n \mapsto n-1$, il existe une bijection F de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$.

2. On a montre dans la question précédente que F est une bijection $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$, ainsi F^{-1} est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^2$. En conséquence $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

Comme $\mathbb{Z}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$ et que $\mathbb{N}^2$ est en bijection avec $\mathbb{N}$, on a finalement $\mathbb{N}$ en bijection avec $\mathbb{Z}^2$ donc $\mathbb{Z}$ dénombrable. On peut expliciter cette bijection : notons F_1^{-1} la première coordonnée de F^{-1} et F_2^{-1} sa seconde coordonnée. Soit ϕ une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ (elle existe selon la question 5 de l'exercice I), on défini $g = (\phi \circ F_1^{-1}, \phi \circ F_2^{-1})$ qui réalise une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}^2$.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est en bijection avec l'ensemble des couples (p,q) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que p et q sont premiers entre eux. Cet ensemble qui est infini est inclus dans $\mathbb{Z}^2$ qui est est dénombrable. La question 3 de l'exercice I permet de conclure que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Exercice III

1. Soit $x \in [0;1[$, on note x_i la i-ème décimale de x. On raisonne par l'absurde.

DÉBUT DU RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE
Supposons qu'il existe une bijection ϕ de $\mathbb{N}$ dans $]0,1[$. Pour chaque entier k, notons $u_k = \phi(k)$ et $a_{n,k}$ la n-ème décimale de u_n. Pour tout n soit b_n un entier compris entre 1 et 8 différent de $a_{n,n}$. Soit $X = \overline{0, b_1 b_2 ... b_n ...}$. Comme ϕ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $]0,1[$ il existe un entier N tel que $\phi(N) = X$. Donc $a_{N,N} = b_N$. **Contradition.**
FIN DU RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE

Donc il n'existe aucune bijection ϕ de $\mathbb{N}$ dans $]0,1[$. Ainsi $]0,1[$ n'est pas dénombrable.

2.

L'idée est la suivante : $\mathbb{R}$ et $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sont en bijection par la fonction tan. L'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $]0,1[$ sont en bijection. Donc $\mathbb{R}$ et $]0,1[$ sont en bijection. La non-dénombrabilité de $]0,1[$ permet de conclure.

Rédaction de l'idée : Soit f l'application définie par

$$\begin{array}{rcl} f\ :]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan\left(\pi x - \dfrac{\pi}{2}\right) \end{array}$$

Cette application est injective. En effet si $x \in]0,1[$ et $y \in]0,1[$ tels que $f(x) = f(y)$ alors $\pi x - \frac{\pi}{2} = \pi y - \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec k entier. Donc $x - y = k \in \mathbb{N}$. Comme $x - y \in]-1,1[$ il vient $x - y = 0$. Ainsi $x = y$ et l'injectivité est établie.

Cette application est surjective. En effet pour tout réel y, il existe $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $y = \tan(\theta)$ donc il existe $x = \frac{\theta}{\pi} + \frac{1}{2} \in]0,1[$ tel que $y = f(x)$. La surjectivité est établie.

Ainsi $\mathbb{R}$ et $]0,1[$ sont en bijection, et $]0,1[$ n'est pas dénombrable par la question précédente. Il en résulte que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.