Pôle Universitaire Léonard de Vinci | Année 2000-2001
CS 103 – Analyse I | Semestre 1

# Devoir à rendre le 28/11/2000

*Ensembles dénombrables*

Un ensemble $E$ est dit *dénombrable* si on peut numéroter ses éléments en utilisant des entiers, c'est-à-dire s'il existe une bijection $\phi$ de $\mathbb{N}$ dans $E$. Le but de ce devoir est de démontrer que les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sont dénombrables et que $\mathbb{R}$ ne l'est pas.

## Exercice I

**1.** Montrer que $\mathbb{N}$ est dénombrable.

**2.** Montrer que l'ensemble des nombres pairs est dénombrable. Expliciter la bijection $\phi$.

**3.** Soit $E$ un ensemble dénombrable et $F \subset E$ infini. Montrer que $F$ est dénombrable.

**4.** Soit $E$ et $F$ deux ensembles dénombrables, montrer que $E \cup F$ est dénombrable.

**5.** En déduire que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

## Exercice II

**1.** On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & (p, q) & \mapsto & (2p+1)2^q \end{array}$$

Montrer que $f$ est bijective.

**2.** En déduire que $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}^2$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

## Exercice III

**1.** Soit $x \in ]0;1[$, on note $x_i$ la[1] $i$-ème décimale de $x$. On adoptera la notation $x = \overline{0, x_1 x_2 ... x_n ...}$. On suppose qu'il existe une bijection $\phi$ de $\mathbb{N}$ dans $]0,1[$ et pour chaque entier $k$, on note $u_k = \phi(k)$. Soit $a_{n,k}$ la $n$-ème décimale de $u_n$. Pour tout $n$ soit $b_n$ un entier compris entre 1 et 8 différent de $a_{n,n}$. Montrer qu'il n'existe pas d'entier $N$ tel que $\phi(N) = \overline{0, b_1 b_2 ... b_n ...}$. En déduire que $]0,1[$ n'est pas dénombrable.

**2.** Déduire de ce qui précède que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

[1] En toute rigueur il existe deux représentations décimales de certains réels, par exemple 0.1000... = 0.0999.... La première s'appelle la représentation décimale propre et la seconde la représentation décimale impropre. On choisit ici la représentation décimale propre.