Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

Année 2000-2001
Semestre 2

Feuille d'exercices 8

La dernière...

Exercice I

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \sin(n)$ et $A = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

1. L'ensemble A est-il fermé ? Est-il ouvert ?

2. Est-il possible que $A' = \emptyset$?

3. En utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass[1], peut-on dire que A' est dense dans $[-1, 1]$?

Exercice II

1. Une suite d'éléments d'un ensemble sans point d'accumulation peut-elle être convergente ?

2. L'ensemble des termes d'une suite convergente admet-il toujours au moins un point d'accumulation ? Sinon quelle(s) conditions faut-il ajouter ? Si oui, est-ce que ce point d'accumulation est necessairement la limite de la suite ?

Exercice III

Les applications suivantes sont-elles des distances sur $\mathbb{R}$. Dessiner la boule unité associée lorsque c'est le cas

1. $d(x, y) = y - x$

2. $d(x, y) = |y^2 - x^2|$

3. $d(x, y) = (y - x)^2$

4. $d(x, y) = |e^x - e^y|$

5. $d(x, y) = 2|y - x|$

[1] Karl Weierstrass, mathématicien allemand, du XIXe siècle, est connu notamment pour sa construction de la théorie des fonctions complexes. Dans ses conférences de 1859-60 Weierstrass donne une introduction inovante à l'analyse et en 1860-61, il traite du calcul intégral. Dans son cours de 1863-64 sur la théorie générale des fonctions analytiques, Weierstrass commence à formuler sa théorie des nombres réels. La notion de convergence uniforme que vous verrez en CS 201 est due à Weierstrass. Il a aussi contribué à la théorie des formes bilinéaires et quadratiques que vous verrez en CS 106.

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897)