Feuille d'exercices 7

Compacts

Exercice I

Pour chacun des ensembles A suivants, et des recouvrements $(\Omega_i)_{i\in I}$ dites s'il est possible d'extraire un sous-recouvrement fini. Comparez avec le théorème de Borel-Lebesgue[1].

1. $A =]0,1[$, $\Omega_i =]\frac{1}{i}, 1-\frac{1}{i}[$, $I = \mathbb{N}^*$

2. $A =]0,1[$, $\Omega_i =]\frac{1}{i}, 1-\frac{1}{i}[$, $I = [1,+\infty[$

3. $A = [0,1]$, $\Omega_i =]-\frac{1}{i}, 1+\frac{1}{i}[$, $I = \mathbb{N}^*$

4. $A = [0,+\infty[$, $\Omega_i =]0,i[$, $I = \mathbb{N}^*$

5. $A = [0,10^9]$, $\Omega_i =]0,i[$, $I = \mathbb{N}^*$

6. $A = [0,10^9[$, $\Omega_i =]0,i[$, $I = \mathbb{N}^*$

Exercice II

Montrer que si $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de compacts non vides alors

$$\cap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$$

Donner un exemple.

Exercice III

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$ On note

$$A + B = \{x \in \mathbb{R},\ \text{t.q. } \exists (a,b) \in A \times B,\ x = a + b\}$$

1. On suppose que A ou B est borné. Démontrer que $\overline{A+B} \subset \overline{A} + \overline{B}$.

2. La somme de deux compacts est-elle compacte ?

[1] Henri Lebesgue, mathématicien français, de la fin du XIXe siècle et du début du XXe siècle. Il est en particulier connu pour la généralisation la notion dintégrale qui porte son nom.

Henri Léon Lebesgue (1875–1941)