Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

Année 2000-2001
Semestre 2

Feuille d'exercices 4

Ouverts

Exercice I

1. L'ensemble $[0,2]$ est-il un voisinage de 2 ? Qu'en est-il de $[0,2[$?

2. L'ensemble $[0,2]$ est-il un voisinage de 1 ? Qu'en est-il de $[0,2[$?

3. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est-il un voisinage de $\mathbb{Z}$?

Exercice II

Représenter graphiquement chaque ensemble suivant et dites si c'est un ouvert ou non.

$$\begin{array}{lllllllll} A &=&]2,3[& B &=&]2,3[\cup]4,5[& C &=&]-1,0[\cup]0,1[\\ D &=& [1,2] & E &=&]0,1[\cup\{2\} & F &=&]-\infty,0[\\ G &=& \mathbb{Z} & H &=& \mathbb{R}^* & I &=& [0,4[\\ J &=& \{0\} & K &=& \mathbb{Q} & L &=& \cup_{n=1}^{+\infty}]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[\end{array}$$

Exercice III

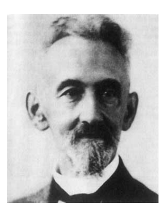
Soit A un ouvert majoré, montrer que A ne contient pas sa borne supérieure.

Exercice IV

Montrer que $\mathbb{R}$ a la propriété de Hausdorff[1]

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ avec } x\neq y,\ \exists(V,W)\in\mathcal{V}(x)\times\mathcal{V}(y),\ V\cap W=\emptyset$$

[1] Felix Hausdorff, mathématicien Allemand du XXe siècle, travailla sur les fondements des mathématiques et la topologie. On lui doit une série de résultats, dont l'ouvrage *Grundzüge der Mengenlehre* paru en 1914 où, en se basant sur les travaux de Fréchet, il crée la théorie de la topologie et des espaces métriques.



Felix Hausdorff (1868–1942)