Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2000-2001
CS 103 – Analyse I — Semestre 1

# Feuille d'exercices 2

*Suites numériques*

## Exercice I

On considère $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Montrer, par récurrence, que $S_n$ est la somme des $n$ premiers entiers et que $T_n$ est la somme des carrés des $n$ premiers entiers.

## Exercice II

Dire si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes vérifient le critère de Cauchy[1]

**1.** $u_n = \frac{1}{n+1}$

**2.** $u_n = n^2$

**3.** $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}$

## Exercice III

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par

$$\begin{aligned} u_n &= 2^n \\ v_n &= 8^n \end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ? Le contraire est-il vrai ?

[1] Augustin Cauchy, mathématicien français du XIXe siècle, donna pour la première fois des définitions rigoureuses de la convergence et de la continuité. Il définit également les nombres complexes. Il travailla aussi sur les groupes de permutations ; cependant ayant égaré des manuscrits d'Abel et de Galois, il a retardé d'un demi-siècle la théorie des groupes.

Baron Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

## Exercice IV

Dire si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes sont croissantes, décroissantes, ou non-monotones.

**1.** $u_n = n^2 - n$

**2.** $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$

**3.** $u_n = \frac{2^n}{3n}$

**4.** $u_n = \frac{3^n(2n+1)}{n!}$

**5.** $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

## Exercice V

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes sont-elles majorées, minorées ou non bornées ?

**1.** $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$

**2.** $u_n = \frac{4n-1}{n+2}$

**3.** $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+2}$

**4.** $u_n = (-1)^n + an$, discuter selon $a \in \mathbb{R}$ le cas échéant.

## Exercice VI

En utilisant la définition de la limite, dites si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes ont une limite.

**1.** $u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n^2}$

**2.** $u_n = \frac{1+e^n}{n}$

## Exercice VII

Calculer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si elle existe, dans les cas suivants.

**1.** $u_n = \frac{2^n}{n!}$

**2.** $u_n = 2^n - n^2$

**3.** $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}}$

**4.** $u_n = n\sin(\frac{1}{n+1})$

**5.** $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}$

**6.** $u_n = \frac{n^2-n}{n^2+1}$