

Feuille d'exercices 1

Notions de base

Exercice I

Pour chacun des ensembles suivants donner, s'ils existent, un majorant, le plus grand élément, la borne supérieure, un minorant, le plus petit élément, la borne inférieure.

1. $[0, 6[$
2. $[0, 6[\cup \{7\}$
3. $] - \infty, 0[\cup] 1, 2[$
4. $\mathbb{Z} \cap] - 2, 2]$
5. $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$
6. $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^*\}$
7. $\{\frac{1}{n} + (-1)^n, n \in \mathbb{N}^*\}$

Exercice II

Soit I et J deux intervalles. Les ensembles suivants sont-ils des intervalles ?

1. $I \cup J$
2. $I \cap J$
3. $I + J = \{x + y, x \in I, y \in J\}$

Exercice III

Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} non vides et non réduits à un point. Montrer qu'il existe une bijection de I sur J .

Exercice IV

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'inégalité de Minkowski¹ soit une égalité .

¹Hermann Minkowski, mathématicien Russe de la fin du XIXe siècle, fut élève de Hilbert et enseignant d'Einstein. Ses travaux en géométrie furent utiles à la théorie de la relativité générale.



Hermann Minkowski (1864–1909)

Exercice V

Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\sqrt{4-x} \leq 1$
2. $\frac{1}{\sqrt{4-x}} \leq 1$
3. $\sqrt{2-x} + \sqrt{1+x} \geq 6$

Exercice VI

Résoudre le systèmes suivants

$$(S) \begin{cases} x + y + \sqrt{x+y} = 56 \\ x - y + \sqrt{x-y} = 30 \end{cases} \quad (T) \begin{cases} x + y = -2 \\ xy = 3 \end{cases}$$

Exercice VII

Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère l'équation $x^2 + mx - m = 0$. Discuter, selon m , le nombre de solutions de l'équation et calculer les solutions, lorsqu'elles existent.

Exercice VIII

$D = \left\{ \frac{m}{2^n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$, appelé ensemble des nombres dyadiques, est-il dense dans \mathbb{R} ?

Exercice IX

Résoudre

1. $|x + 2| = 3$
2. $|x + 5| \leq 9$
3. $|x + 1| + |x - 3| \leq 9$
4. $E(2x + 1) \leq 9$

Exercice X

Montrer les propriétés suivantes

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow E(x) \leq E(y)$
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow E(x + y) - E(x) - E(y) \in [0, 1]$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, E(-x) = -E(x) - 1$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, E(x + n) = E(x) + n$