Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2000-2001

CS 103 – Analyse I — F 01 – Semestre 1

Interrogation du 12/4/2001

correction

Exercice I

1. Soit (H_n) l'hypothèse

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{p}{p+1} = \frac{n}{n+1}$$

Alors

- (H_1) est vrai puisque $\sum_{p=1}^{1} \frac{p}{p+1} = \frac{1}{1+1}$.
- Soit $n \geq 1$ un entier. Supposons que (H_n) est vrai, alors

  $$\sum_{p=1}^{n} \frac{p}{p+1} = \frac{n}{n+1}$$

  donc

  $$\left(\sum_{p=1}^{n} \frac{p}{p+1}\right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

  donc

  $$\sum_{p=1}^{n+1} \frac{p}{p+1} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}$$

  donc

  $$\sum_{p=1}^{n+1} \frac{p}{p+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

  donc (H_{n+1}) est vrai.

En conséquence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{p=1}^{n} \frac{p}{p+1} = \frac{n}{n+1}$$

Exercice II

Le polynôme $x^2 + 3x + 2$ a un discriminant $\Delta = 1$, ses deux racines sont -2 et -1, il est du signe du coefficient dominant, c'est-à-dire positif, a l'exterieur des racines et il est négatif à l'interieur des racines. D'autre part $x + 4$ est positif si et seulement si $x \geq -4$. On en déduit le tableau suivant.

x	$-\infty$ -4	-4 -2	-2 -1	-1 $+\infty$
$\|x+4\|$	$-x-4$	$x+4$	$x+4$	$x+4$
$\|x^2+3x+2\|$	x^2+3x+2	x^2+3x+2	$-x^2-3x-2$	x^2+3x+2
Inéquation	$x^2+3x+2 \geq -x-4$ $\Updownarrow$ $x^2+4x+6 \geq 0$ Toujours satisfait	$x^2+3x+2 \geq x+4$ $\Updownarrow$ $x^2+2x-2 \geq 0$ $\Updownarrow$ $x \notin [-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}]$	$-x^2-3x-2 \geq x+4$ $\Updownarrow$ $-x^2-4x-6 \geq 0$ Jamais satisfait	$x^2+3x+2 \geq x+4$ $\Updownarrow$ $x^2+2x-2 \geq 0$ $\Updownarrow$ $x \notin [-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}]$
Solutions	$]-\infty, -4]$	$[-4, -1-\sqrt{3}]$	$\emptyset$	$[-1+\sqrt{3}, +\infty[$

Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]-\infty; -1-\sqrt{3}] \cup [-1+\sqrt{3}; +\infty[$.

Exercice III

1. Considérons la fonction f définie sur $[8, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{(\ln x)^2}$$

Cette fonction est dérivable comme quotient de fonctions dérivables non nulles sur son domaine de définition, on a

$$f'(x) = \frac{(\ln x)^2 - 2\ln x}{(\ln x)^4} = \frac{(\ln x)(\ln x - 2)}{(\ln x)^4}$$

On sait que $\ln 8 > 2$ donc $f'(x) > 0$ donc f est croissante. Par suite (v_n) est croissante des que $n \geq 8$.

2. On a $v_8 = \frac{8}{(\ln 8)^2}$. Comme $\ln 8 < 2.1$ on a $(\ln 8)^2 < 2.1^2$, et $2.1^2 = (2+0.1)^2 = 4+0.4+0.01 = 4.41 < 8$. Ainsi $\frac{1}{(\ln 8)^2} > 8$ et donc $v_8 > 1$. Comme (v_n) est croissante on en déduit que $v_n \geq v_8 > 1$ lorsque $n \geq 8$. Ainsi $\frac{n}{(\ln n)^2} \geq 1$, donc $n \geq (\ln n)^2$.

3. Soit $A \in \mathbb{R}$. Posons $N = \max\{8; \mathrm{E}(e^A)+1\}$, alors pour $n \geq N$ on a $n \geq e^A$ donc $\ln n \geq A$ donc $\ln n(\ln n - A) \geq 0$ donc $(\ln n)^2 - A\ln n \geq 0$ Or comme $n \geq 8$ on a $n \geq (\ln n)^2$ ainsi $n - A\ln n \geq 0$ donc $n \geq A\ln n$ d'où finalement $\frac{n}{\ln n} \geq A$. On a montré que

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow u_n \geq A$$

ainsi $\lim \frac{n}{\ln n} = +\infty$.