Interrogation du 8/3/2001

correction

Exercice I

1. φ n'est pas injective car $\varphi(2,3) = (5,6) = \varphi(3,2)$ alors que $(2,3) \neq (3,2)$.

2. L'équation $X^2 - 2X + 3 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ puisque son discriminant $\Delta = -8 < 0$. Donc le système

$$\begin{cases} p+q = 2 & \text{(somme des racines)} \\ pq = 3 & \text{(produit des racines)} \end{cases}$$

n'a pas de solution. Donc $(2,3)$ n'a pas d'antécédant par φ. Ainsi φ n'est pas surjective.

3. φ n'est pas bijective car elle n'est pas simultanément injective et surjective.

Exercice II

Soit I un intervalle de la forme $]-\infty, b[$ ou $]a, b[$ avec $a < b$. L'ensemble des majorants de I est $[b, +\infty[$ donc le plus petit des majorants (*i.e.* la borne supérieure) est b. Comme $b \notin I$ on a bien prouvé que I ne contient pas sa borne supérieure.

Exercice III

Considérons

- Une bijection f de $[4,5[$ dans $[0, \frac{\pi}{2}[$, par exemple $f(x) = \frac{\pi}{2}(x-4)$.
- Une bijection g de $[0, \frac{\pi}{2}[$ dans $[0, +\infty[$, par exemple $g = \tan$.
- Une bijection h de $[0, +\infty[$ dans $[5, +\infty[$, par exemple $h(x) = x + 5$

La fonction $h \circ g \circ f$ est une bijection de $[4,5[$ dans $[5, +\infty[$. On peut l'expliciter, il s'agit de

$$x \mapsto 5 + \tan\left(\frac{\pi}{2}(x-4)\right)$$

Notons que cette bijection n'est pas unique, on aurait aussi pu considérer (par exemple)

$$x \mapsto 4 + \frac{1}{5-x}$$

Exercice IV

$\sqrt{x+1} \geq \sqrt{x+4} - 1$ est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{l} x+1 \geq 0 \\ \sqrt{x+4} - 1 \geq 0 \\ x+1 \geq (\sqrt{x+4} - 1)^2 \end{array}\right.$$

en effet $x+1 \geq 0$ entraine $x+4 \geq 0$ ce qui fait que $x+4 \geq 0$ n'a pas être supposé ; l'expression $\sqrt{x+1}$ est toujours positive donc cela n'a pas à être supposé et $t \mapsto t^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{l} x \geq -1 \\ \sqrt{x+4} \geq 1 \\ x+1 \geq x+4 - 2\sqrt{x+4} + 1 \end{array}\right.$$

Comme $x \geq -1$ la seconde ligne de ce système peut être remplacée par $x+4 \geq 1$, le système est donc équivalent à

$$\left\{\begin{array}{l} x \geq -1 \\ x+4 \geq 1 \\ \sqrt{x+4} \geq 2 \end{array}\right.$$

ce qui est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{l} x \geq -1 \\ x \geq -3 \\ x+4 \geq 4 \end{array}\right.$$

ce qui est équivalent à $x \geq 0$. Ainsi

$$\mathcal{S} = \mathbb{R}^+$$