Examen du 9/6/2001

Correction

Exercice I

Intérieur : $\overset{\circ}{A} =]-1, 2[$.

En effet A n'est pas voisinage de 2 ni de 3, les autres éléments de $]-1, 2[$ admettent A comme voisinage.

Adhérence : $\overline{A} = [-1, 2] \cup \{3\}$.

En effet la suite $u_n = 2 - \frac{1}{n}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers 2. Les éléments qui ne sont pas dans $[-1, 2] \cup \{3\}$ sont a distance strictement positive de A et ne peuvent pas être dans l'adhŕence.

Frontière : $\partial A = \{-1, 2, 3\}$.

En effet $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Points isolés et d'accumulation : $A^* = \{3\}$ et $A' = [-1, 2]$.

En effet $]3 - \frac{1}{2}, 3 + \frac{1}{2}[\cap A = \{3\}$ donc 3 est isolé, d'autre part tous les points de $[-1, 2]$ sont d'accumulation puisque pour tout x dans cet intervalle $\forall \varepsilon > 0$, $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Comme $A^* \cup A' = \overline{A}$ et $A^* \cap A' = \emptyset$, on en déduit le résultat annoncé.

Exercice II

1. Soit $e \in \mathbb{R}$. Il est équilibre de la relation de récurrence si et seulement si $e = e^2$ c'est-à-dire si et seulement si $e(e-1) = 0$. Il y a donc deux équilibres : 0 et 1.

2. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. On a $f'(0) = 0$ donc 0 est un équilibre stable. En revanche 1 n'est pas un équilibre stable car la suite issue de toute condition initiale $1 + a$ avec $a > 0$ tend vers $+\infty$. Cela se démontre en prouvant par récurrence que $u_n \geq 1 + na$. Soit, en effet (H_n) cette hypothèse de récurrence, alors (H_0) et (H_1) sont vraies. Supposons que (H_n) est vraie alors $u_n \geq 1 + na$ donc $u_{n+1} \geq (1 + na)^2 = 1 + 2na + n^2a^2 \geq 1 + (n+1)a$ donc (H_{n+1}) est vraie. Ainsi $\lim u_n \neq 1$ donc 1 n'est pas un équilibre stable.

3. Voir figure 1.

Exercice III

1.

a . Considérons l'équation $r^2 = \frac{5}{6}r - \frac{1}{6}$. Elle est équivalente à $6r^2 - 5r + 1 = 0$ qui a deux racines : $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$. Ainsi il existe deux réels a et b tels que $u_n = a\frac{1}{2^n} + b\frac{1}{3^n}$. Or $a + b = u_0 = 2$ et $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} = u_1 = \frac{5}{6}$. La résolution de ce système, d'inconnues a et b donne $a = b = 1$ ainsi

$$u_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$$

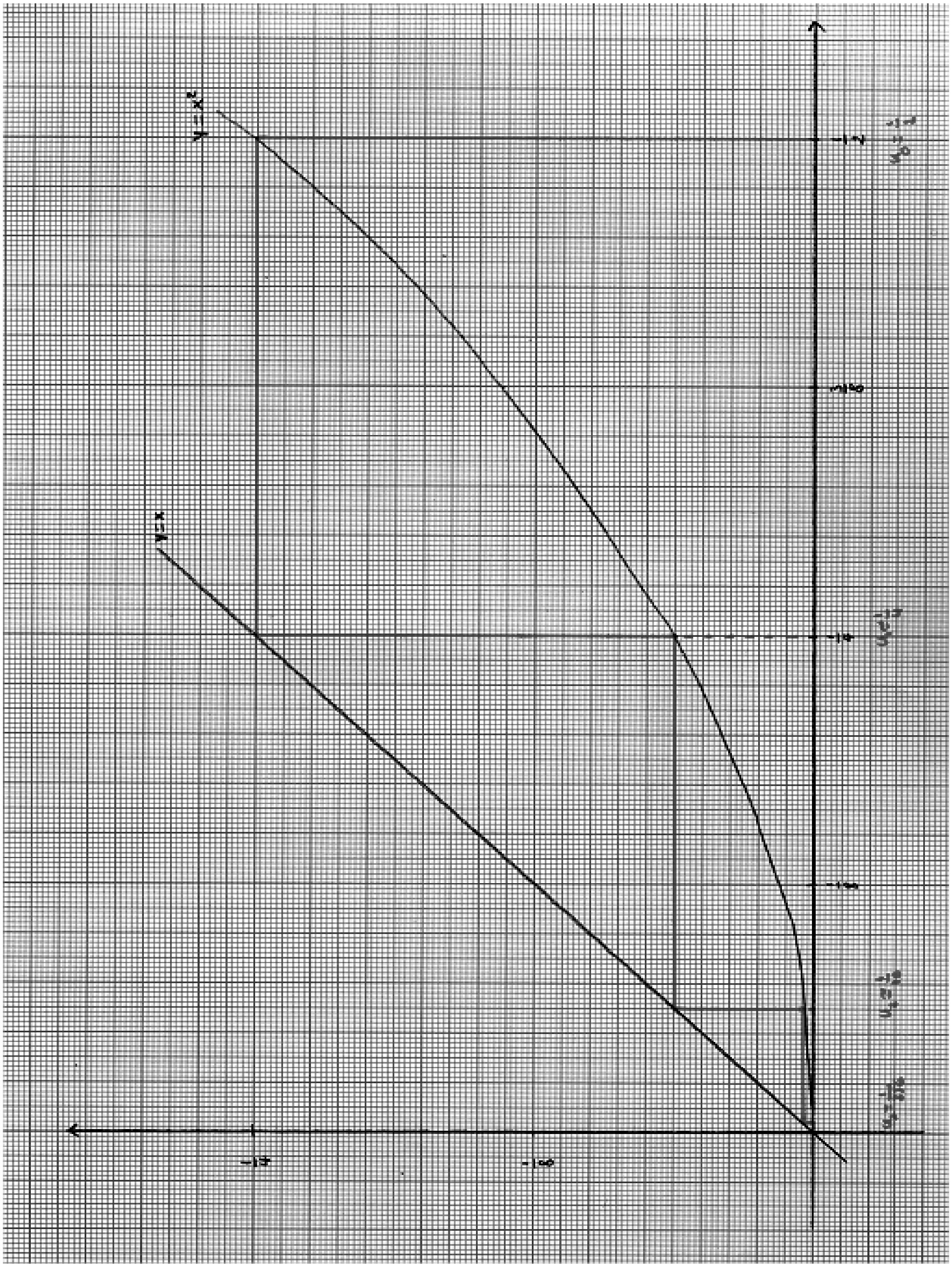

Figure 1:

b . Comme $\lim \frac{1}{2^n} = 0$ et $\lim \frac{1}{3^n} = 0$ on a $\lim u_n = 0$.

c . La suite (u_n) est à termes positifs de plus $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{6}u_n - \frac{1}{6}u_{n-1}$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$, en conséquence la suite est décroissante

2.

a . A n'est pas ouvert puisqu'il n'est pas voisinage de $2 \in A$. (remarquons que si c'était le cas il serait indénombrable).

b . A n'est pas fermé puisque pour tout entier n on a $u_n \in A$ et pourtant $\lim u_n = 0 \notin A$.

c . Soit $\Omega_n =]u_{n+1}, u_{n-1}[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Omega_0 =]\frac{5}{6}, 3[$. Comme (u_n) est décroissante on a $u_n \in \Omega_n$. De plus $u_n \notin \Omega_m$ lorsque $n \neq m$. Ainsi $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un recouvrement de A mais si on considère $(\Omega_n)_{n \in J}$ avec J strictement inclus dans $\mathbb{N}$ (et *a fortiori* fini) la famille d'ensemble $(\Omega_n)_{n \in J}$ ne recouvre plus A.

d . A n'est pas compact en vertu de la question précédente et Borel-Lebesgue. On pouvait aussi le déduire du fait que A n'est pas fermé.

Exercice IV

1. Soit $x \in A \cap \overline{B}$. Comme $x \in \overline{B}$, il existe (u_n) suitre d'éléments de B qui converge vers x. D'autre part, comme $x \in A$ et que A est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A$. Comme $\lim u_n = x$, il existe un rang N tel que $n > N$ entraine $|u_n - x| < \varepsilon$. Donc pour $n > N$ on a $u_n \in A$. Par suite $u_n \in A \cap B$. Il existe donc une suite d'éléments de $A \cap B$ (par exepmple la suite extraite de (u_n) des termes dont l'indice est strictement supérieur à N) qui converge vers x. Donc $x \in \overline{A \cap B}$. Ainsi $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$

2. L'inclusion $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$ n'est pas vraie sans l'hypothèse A ouvert comme le montre le contre-exemple suivant : $A =]0, 1]$ et $B =]1, 2[$.

3. Il suffit de prendre $A =]0, 2[\cup]3, 4[$ et $B =]1, 3[$.