Pôle Universitaire Léonard de Vinci | Année 2000-2001
CS 103 – Analyse I | F 01 – Semestre 1

Examen du 9/6/2001

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Vos réponses doivent être justifiées et rédigées. Les quatre exercices sont indépendants. Le sujet contient deux pages. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice I (4 points)

On considère l'ensemble

$$A = [-1, 2[\cup \{3\}$$

Quel est son intérieur, son adhérence, sa frontière, son ou ses points isolés et son ou ses points d'accumulation ?

Exercice II (4 points)

On considére la relation de recurrence $u_{n+1} = (u_n)^2$

1. Quels sont le ou les équilibres de cette relation.

2. Pour chaque équilibre dites s'il est stable ou instable.

3. Au moyen d'un graphe, que vous réaliserez sur le papier milimétré joint, determinez la valeur des 4 premiers termes de la suite issue de la condition initiale $u_0 = \frac{1}{2}$.

Exercice III (7 points)

1. Soit (u_n) une suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = \frac{5}{6} \\ u_{n+1} = \frac{5}{6} u_n - \frac{1}{6} u_{n-1} \end{cases}$$

a . Donner le terme général de (u_n)

b . Montrer que $\lim u_n = 0$

c . La suite est-elle croissante ? Décroissante ? Non monotone ?

2. On considère

$$A = \left\{ \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

a . L'ensemble A est-il ouvert ?

b . L'ensemble A est-il fermé ?

c . Expliciter un recouvrement de A par des ouverts, dont on ne peut pas extraire un sous recouvrement fini.

d . L'ensemble A est-il compact ?

Exercice IV (5 points)

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$, deux ensembles.

1. On suppose que A est ouvert. Montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

2. L'inclusion $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$ est-elle toujours vraie sans l'hypothèse A ouvert ?

3. Donner un exemple d'ensembles ouverts A et B tels que les quatre ensembles

$$A \cap \overline{B}\ ,\quad \overline{A} \cap B\ ,\quad \overline{A \cap B} \quad \text{et} \quad \overline{A} \cap \overline{B}$$

soient tous différents.