Devoir du 15/05/2001

Correction

Exercice I

1. Le réel $e \in I$ est un équilibre de la relation de récurrence si et seulement si

$$e = e - \frac{g(e)}{g'(e)} \text{ et } e \in I$$

Comme g' ne s'annule pas sur I, cette équation équivaut à $g(e) = 0$ avec $e \in I$. Cette dernière équation a une solution unique α, en conséquence la relation de récurrence a un unique équilibre α sur I.

2. Soit $f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}$. Une condition suffisant de stabilité locale est $|f'(x)| < 1$. Or

$$f'(x) = 1 - \frac{g'(x)g'(x) - g(x)g''(x)}{g'(x)^2} = \frac{g(x)g''(x)}{g'(x)^2}$$

on obtient donc la condition suffisante suivante :

$$\left| \frac{g(x)g''(x)}{g'(x)^2} \right| < 1 \tag{1}$$

Cette condition est toujours satisfaire en α puisque $g(\alpha) = 0$.

3. Considérons (par exemple)

$$\begin{cases} u_0 = \frac{a+b}{2} \\ u_{n+1} = u_n - \frac{g(u_n)}{g'(u_n)} \end{cases}$$

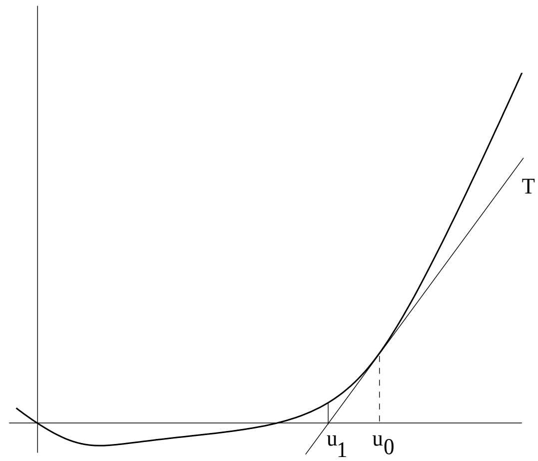
La question précédente permet d'affirmer que $\lim u_n = \alpha$.

4. Proposons l'algorithme suivant

- $x \leftarrow \frac{a+b}{2}$
- Tant que $g(x - \varepsilon)g(x + \varepsilon) > 0$ faire $x \leftarrow x - \frac{g(x)}{g'(x)}$
- Rendre le résulat : x

Le test $g(x - \varepsilon)g(x + \varepsilon) > 0$ a pour but de poursuivre la recherche de racine jusqu'à ce que g change de signe dans un invervalle centré en x de rayon ε. Comme g est continue, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que g admet une racine α telle que $|x - \alpha| \leq \varepsilon$.

5. Graphiquement, il faut interpréter cette suite de la manière suivante. On part d'un point $(u_0, f(u_0))$. On trace la tangente a la courbe en ce point, on appelle u_1 l'abscisse de l'intersection avec l'axe des abscisses. Sous la condition (1) ce point est plus proche de la racine.



En itérant ce processus on à une suite convergeant vers la racine. On notera qu'il est indispensable de supposer que g' ne s'annule pas sur I afin de garantir que la tangente intersecte l'axe des abscisses.

Exercice II

1. Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \exp(x) - x^2$$

Cette application est dérivable, sa dérivée est

$$g'^{(x)} = \exp(x) - 2x$$

qui est strictement positive sur I. Ainsi g est strictement croissante et continue sur I. En conséquence elle réalise une ijection de $[-1.5;-0.5]$ sur $[g(-1.5);g(-0.5)]$. Comme $g(-1.5) < 0$ et $g(-0.5) > 0$, le réel 0 a un antécédant unique $\alpha \in I$.

2. Il s'agit de démontrer que $|e^x - x^2||e^x - 2| < |(e^x - 2x)^2|$. Comme $(e^x - 2x)^2 \geq 0$ et $e^x - 2 \leq 0$, on distingue les 2 cas suivants :

- Si $x \in [-\frac{3}{2}, \alpha]$ alors $e^x - x^2 \leq 0$, il s'agit donc de démontrer que $(e^x - x^2)(e^x - 2) < (e^x - 2x)^2$, c'est-à-dire que
$$e^{2x} - 2e^x - x^2e^x + 2x^2 < e^{2x} - 4xe^x + 4x^2$$
c'est-à-dire que
$$(x^2 - 4x + 2)e^x + 2x^2 > 0$$
ce qui est vérifié puisque $x^2 - 4x + 2 > 0$ sur $[-\frac{3}{2}, \alpha]$ et $2x^2 \geq 0$.

- Si $x \in [\alpha, -\frac{1}{2}]$ alors $e^x - x^2 \geq 0$, il s'agit donc de démontrer que $-(e^x - x^2)(e^x - 2) < (e^x - 2x)^2$, c'est-à-dire que $-e^{2x} + 2e^x + x^2e^x - 2x^2 < e^{2x} - 4xe^x + 4x^2$, c'est-à-dire que
$$2e^{2x} + (-x^2 - 4x - 2)e^x + 4x^2 > 0$$
c'est-à-dire que
$$e^{2x} + (-\frac{1}{2}x^2 - 2x - 1)e^x + 2x^2 > 0$$
c'est-à-dire que
$$(e^x + (-\frac{1}{4}x^2 - x - \frac{1}{2}))^2 + 2x^2 - (-\frac{1}{4}x^2 - x - \frac{1}{2})^2 > 0$$

c'est-à-dire que

$$(e^x + (-\frac{1}{4}x^2 - x - \frac{1}{2}))^2 + (-\frac{1}{4}x^2 + (\sqrt{2}-1)x - \frac{1}{2})(\frac{1}{4}x^2 + (1+\sqrt{2})x + \frac{1}{2}) > 0$$

Ce qui est vérifié puisque $(e^x + (-\frac{1}{4}x^2 - x - \frac{1}{2}))^2 \geq 0$, $-\frac{1}{4}x^2 + (\sqrt{2}-1)x - \frac{1}{2} < 0$ et $\frac{1}{4}x^2 + (1+\sqrt{2})x + \frac{1}{2} < 0$ sur $[\alpha, -\frac{1}{2}]$.

3. La fonction g est bien de classe C^2, sa dérivée ne s'annule pas sur I et la question précédente permet d'affirmer que la condition 1 est satisfaite. Par suite on peut appliquer l'algorithme décrit dans l'exercice précédent. On obtient les resultats suivants :

Itération 0	$x = -1.0000000000$
Itération 1	$x = -0.7330436052$
Itération 2	$x = -0.7038077863$
Itération 3	$x = -0.7034674683$
Itération 4	$x = -0.7034674225$

On trouve le résultat suivant (à 10^{-8} près)

$$\alpha \simeq -0.70346742$$

4. On fait une dichotomie c'est-à-dire qu'on part de I et 'a chaque étape on observe le signe de g au milieu de l'intervalle et on ré-itére sur la moitie de l'intervalle dans laquelle se trouve la racine. On obtient les resultats suivants :

Itération 0	$x = -1.0000000000$
Itération 1	$x = -0.7500000000$
Itération 2	$x = -0.6250000000$
Itération 3	$x = -0.6875000000$
Itération 4	$x = -0.7187500000$
Itération 5	$x = -0.7031250000$
Itération 6	$x = -0.7109375000$
Itération 7	$x = -0.7070312500$
Itération 8	$x = -0.7050781250$
Itération 9	$x = -0.7041015625$
Itération 10	$x = -0.7036132813$
Itération 11	$x = -0.7033691407$
Itération 12	$x = -0.7034912111$
Itération 13	$x = -0.7034301760$
Itération 14	$x = -0.7034606936$
Itération 15	$x = -0.7034759524$
Itération 16	$x = -0.7034683230$
Itération 17	$x = -0.7034645083$
Itération 18	$x = -0.7034664157$
Itération 19	$x = -0.7034673694$
Itération 20	$x = -0.7034678462$
Itération 21	$x = -0.7034676078$
Itération 22	$x = -0.7034674886$
Itération 23	$x = -0.7034674290$
Itération 24	$x = -0.7034673992$
Itération 25	$x = -0.7034674141$

On trouve le résultat suivant (à 10^{-8} près)

$$\alpha \simeq -0.70346741$$

On remarque qu'il faut 25 itérations au lieu de 4. L'utilisation d'un ordinateur permettant de calculer avec plus de decimales permet d'obtenir une valeur approchée à 10^{-100} en 6 itérations avec la méthode décrite dans l'exercice I alors qu'il faut 332 itérations avec une dichotomie.