Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2000-2001
CS 103 – Analyse I — F 01 – Semestre 1

Devoir à rendre le 15/5/2001

Méthode de Newton pour la résolution d'équations

On considère une fonction g de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont la dérivée ne s'annule pas sur $I = [a, b]$. On suppose que g a une unique racine α dans I. Il s'agit de calculer une valeur approchée de cette racine.

Exercice I

Considérons la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n - \frac{g(u_n)}{g'(u_n)} \tag{1}$$

1. Determiner le ou les équilibres de (1) appartenant à I

2. Donner une condition suffisante pour que ce (ou ces) equilibres sont-ils stables ?

3. Construire une suite qui converge vers α.

4. Décrire un algorithme, se basant sur cette suite, permettant de trouver une valeur approchée de α à $\varepsilon > 0$ près.

5. Interpréter graphiquement cet algorithme.

Exercice II

On considére l'équation

$$\exp(x) = x^2$$

1. Montrer que cette équation a une solution unique dans $[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}]$.

2. Montrer que

$$\left| \frac{(\exp(x) - x^2)(\exp(x) - 2)}{(\exp(x) - 2x)^2} \right| < 1$$

pour tout x dans $[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}]$.

3. Utiliser l'algorithme de l'exercice I pour trouver une valeur approchée à 10^{-8} près de la solution de l'équation. On pourra utiliser une calculatrice ou un ordinateur.

4. Utiliser la dichotomie pour pour trouver une valeur approchée à 10^{-8} près de la solution de l'équation. On pourra utiliser une calculatrice ou un ordinateur. Comparer le résultat et le nombre d'opérations nécessaire, avec la question 3.