Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

Année 2000-2001
F 01 – Semestre 1

Devoir du 26/04/2001

Correction

Exercice I

1. On a

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^N}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^N$$

dont la limite lorsque N tend vers $+\infty$ est 1. Ainsi la série de terme général $\frac{1}{2^n}$ est convergente et on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.

2. Si $q = 1$ alors $\sum_{n=1}^{N} q^n = N$ dont la limite lorsque N tend vers $+\infty$ est $+\infty$ ainsi la série diverge. Sinon $q \neq 1$, alors

$$\sum_{n=1}^{N} q^n = q \cdot \frac{1-q^N}{1-q} = \frac{q}{1-q} - \frac{q^N}{1-q}$$

Par suite, la série converge si et seulement si $|q| < 1$.

3. Cette question a été faite en TD.

4. Si $s = 0$ alors la série diverge (*cf.* question 2 avec $q = 1$). Si $s = 1$ alors la série diverge (*cf.* question 3). Sinon $s \notin \{0; 1\}$, on considère $f(x) = \frac{1}{x^s}$ dont une primitive est $F(x) = \frac{1}{(s-1)x^{s-1}}$.

- Supposons $s > 0$ (et différent de 1). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [n, n+1]$ on a

$$\frac{1}{(n+1)^s} \leq f(x) \leq \frac{1}{n^s}$$

  ce qui implique les 6 lignes suivantes

$$\begin{array}{rcccl}
\int_n^{n+1} \frac{1}{(n+1)^s}\,dx & \leq & \int_n^{n+1} f(x)\,dx & \leq & \int_n^{n+1} \frac{1}{n^s}\,dx \\
\frac{1}{(n+1)^s} & \leq & \int_n^{n+1} f(x)\,dx & \leq & \frac{1}{n^s}\,dx \\
\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)^s} & \leq & \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} f(x)\,dx & \leq & \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}\,dx \\
\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)^s} & \leq & \int_1^{N+1} f(x)\,dx & \leq & \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}\,dx \\
\sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n^s} & \leq & \frac{1}{(s-1)(N+1)^{s-1}} - \frac{1}{s-1} & \leq & \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}\,dx \\
\frac{1}{(N+1)^s} - 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} & \leq & \frac{1}{(s-1)(N+1)^{s-1}} - \frac{1}{s-1} & \leq & \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}\,dx
\end{array}$$

  Si $s > 1$ alors l'inégalité de gauche donne la convegence de la série. Si $s < 1$ alors l'inégalité de droite donne la divergence de la série.

- Supposons $s < 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{1}{n^s} = n^{-s} \geq 1$ donc $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \geq \sum_{n=1}^{N} 1 \geq N$ donc lorsque N tend vers $+\infty$ la série diverge.

Conclusion : la série converge si et seulement si $s > 1$.

5. Par définition de ζ, il résulte de la quesiton précédente que le domaine de définition est $]1, +\infty[$.

Exercice II

1. Soit $v_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$. Si la série converge alors (v_n) est de Cauchy donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ q > p \geq N \Rightarrow |v_q - v_p| < \varepsilon$$

Donc en particulier pour $q = p+1$ on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ p \geq N \Rightarrow |v_{p+1} - v_p| < \varepsilon$$

or $v_{p+1} - v_p = u_{p+1}$ donc $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ p \geq N \Rightarrow |u_{p+1}| < \varepsilon$ donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ n \geq N \Rightarrow |u_n| < \varepsilon$$

donc $\lim_{u_n} = 0$.

3. La réciproque est fausse comme le montre le contre exemple de la question 3 de l'exercice I.

Exercice III

1.

a . Pour tout entier $N \geq 1$ on a

$$\sum_{n=1}^{N} u_n \leq \sum_{n=1}^{N} v_n$$

Si la série du membre de droite converge alors elle est bornée. Donc $\sum_{n=1}^{N} u_n$ est majoré.
Comme $\sum_{n=1}^{N+1} u_n - \sum_{n=1}^{N} u_n = u_{N+1} > 0$, la série est croissante.
En conséquence elle est convergente.

b . Il s'agit de la contraposée de la question précédente.

c . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $n+1 \leq 2n$ donc $\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2n}$. La série de associée au membre de droite est $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ dont on a montré la divergence dans la question 3 de l'exercice I. Ainsi, par ce qui précéde la série de terme général $\frac{1}{n+1}$ diverge également.

2.

a . Les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes en $+\infty$ équivaut à

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = 1$$

en vertu de la définition de la limite

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow \left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| < \varepsilon$$

en particulier pour $\varepsilon = 1$ il existe un rang N_1 à partir duquel $|\frac{u_n}{v_n} - 1| < 1$ ce qui implique $\frac{u_n}{v_n} < 2$ d'où

$$\forall n \geq N_1,\ u_n < 2v_n \tag{1}$$

pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ il existe un rang N_2 à partir duquel $|\frac{u_n}{v_n} - 1| < \frac{1}{2}$ ce qu'implique $\frac{1}{2} < \frac{u_n}{v_n}$ d'où

$$\forall n \geq N_2,\ \frac{1}{2} v_n < u_n \tag{2}$$

Soit $N = \max\{N_1, N_2\}$. Les inégalités (1) Et (2) donnent

$$\forall n \geq N,\ \frac{1}{2} v_n < u_n < 2v_n$$

la question 1 permet de conclure.

b . Cette suite est équivalente à $\frac{1}{n^3}$ puisque $\lim \frac{\frac{n+3}{n^4+1}}{\frac{1}{n^3}} = 1$. Or la série de terme général $\frac{1}{n^3}$ converge selon la question 4 de l'exercice I.

3.

a . Il existe un rang N à partir duquel $u_{n+1} \leq \frac{1+L}{2} u_n$. Par récurrence on établit que pour tout $n \geq N$

$$u_n \leq \left(\frac{1+L}{2}\right)^{n-N} u_N \leq C\, q^n$$

où C est une constante indépendante de n et $q = (1+L)/2 \in [0, 1[$. La question 2 de l'exercice I permet d'affirmer que la série de terme général q^n converge et la question 1 de l'exercice III permet qlors de conclure.

b . Il existe un rang N à partir duquel $u_{n+1} > \frac{1+L}{2} u_n$. Par récurrence on établit que pour tout $n \geq N$

$$u_n \geq \left(\frac{1+L}{2}\right)^{n-N} u_N \geq C\, q^n$$

où C est une constante indépendante de n et $q = (1+L)/2 > 1$. La question 2 de l'exercice I permet d'affirmer que la série de terme général q^n diverge et la question 1 de l'exercice III permet qlors de conclure.

c . Les séries de terme général $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$ donnent toutes les deux $L = 1$ pourtant la première diverge et la seconde converge. Il n'y a donc pas d'espoir de conclure simplement à partir de L.

d . On a

$$\frac{\frac{(n+1)^3}{(n+1)!}}{\frac{n^3}{n!}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \frac{1}{n+1}$$

donc $L = 0 < 1$ on conséquence la série de terme général $\frac{n^3}{n!}$ converge.

4.

a . Il existe un rang N partir duquel

$$u_n \leq \left(\frac{1+L}{2}\right)^n$$

Soit $q = (1+L)/2 \in [0, 1[$, La question 2 de l'exercice I permet d'affirmer que la série de terme général q^n converge et la question 1 de l'exercice III permet qlors de conclure.

b . Il existe un rang N partir duquel

$$u_n \geq \left(\frac{1+L}{2}\right)^n$$

Soit $q = (1+L)/2 > 1$, La question 2 de l'exercice I permet d'affirmer que la série de terme général q^n diverge et la question 1 de l'exercice III permet qlors de conclure.

c . En considérant $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$. On a $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \exp(\frac{1}{n}\ln n)$ et $\lim(\frac{1}{n}\ln n) = 0$ donc $L = 1$. De même $\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \exp(\frac{1}{n^2}\ln n)$ et $\lim(\frac{1}{n^2}\ln n) = 0$ donc $L = 1$. A nouveau, les séries de terme général $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$ donnent toutes les deux $L = 1$ pourtant la première diverge et la seconde converge. Il n'y a donc pas d'espoir de conclure simplement à partir de L.

d . On a $\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{n}$ donc la limite est $L = 0$ donc la série de terme général $\frac{1}{n^n}$ converge.