Devoir à rendre le 26/4/2001

Séries

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels, on appelle série de terme général u_n la suite $(S_N)_{N\geq 1}$ définie par

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$$

on dit que la série converge si et seulement si $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} u_n = l \in \mathbb{R}$ dans ce cas on note $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = l$. Au contraire si $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} u_n$ n'est pas un réel (ou n'existe pas) on dit que la série diverge.

Exercice I

1. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{2^n}$ est convergente.

2. Discuter la convergence de la série de terme général q^n selon la valeur du paramétre réel q.

3. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge.

4. Discuter la convergence de la série de terme général $\frac{1}{n^s}$ selon la valeur du paramétre réel s.

5. En déduire le domaine de définition de la fonction ζ de Cauchy définie dans l'exercice II de la feuille d'exercices 2.

Exercice II

1. Montrer que si la série de terme général u_n converge alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

2. Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice III

Dans cet exercice on considère des suites à termes strictement positif.

1. Théorème de comparaison — Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$.

a . Montrer que si la série de terme général v_n converge alors la série de terme général u_n converge.

b . Montrer que si la série de terme général u_n diverge alors la série de terme général v_n diverge.

c . Application : montrer que la série de terme général $\frac{1}{n+1}$ diverge.

2. Théorème d'équivalence — Soit (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes.

a . Montrer que les séries associées sont soit toutes les deux convergentes, soit toutes les deux divergentes.

b . Application : montrer que la série de terme général $\frac{n+3}{n^4+1}$ converge.

3. Règle de Dalembert — Soit $L = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$

a . Montrer que si $L < 1$ alors la série de terme général u_n est convergente.

b . Montrer que si $L > 1$ alors la série de terme général u_n est divergente.

c . Montrer que si $L = 1$ alors on ne peut pas conclure.

d . Application : étudier la série de terme général $\frac{n^3}{n!}$.

4. Règle de Cauchy — Soit $L = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}$

a . Montrer que si $L < 1$ alors la série de terme général u_n est convergente.

b . Montrer que si $L > 1$ alors la série de terme général u_n est divergente.

c . Montrer que si $L = 1$ alors on ne peut pas conclure.

d . Application : étudier la série de terme général $\frac{1}{n^n}$.