

Devoir du 30/03/2001

correction

Exercice I

1. Soit $u_N = \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{10^n}$. Comme $a_n \leq 9$ on a

$$\begin{aligned} u_N &\leq \sum_{n=1}^N \frac{9}{10^n} \\ &\leq 9 \sum_{n=1}^N \frac{1}{10^n} \\ &\leq 9 \frac{1}{10} \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^N}{1 - \frac{1}{10}} \\ &\leq 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^N \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

D'autre part $u_{N+1} - u_N = \frac{a_{N+1}}{10^{N+1}} \geq 0$ donc (u_n) est croissante et majorée, ainsi elle est convergente. Comme $0 \leq u_N \leq 1$ on a $0 \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} u_N \leq 1$. Ainsi (u_N) converge vers un réel x de $[0; 1]$.

2. Réciproquement, soit $x \in [0; 1]$. Si $x < 1$ il suffit de poser a_n égale la n -ième décimale de x . Si $x = 1$ on pose $a_n = 9$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ en effet

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{9}{10^n} = 1$$

3. Le développement décimale n'est pas nécessairement unique. Par exemple $x = 0,5$ peut également s'écrire $x = 0,4999\dots$. Plus généralement

$$x = \overline{0, a_1 a_2 \dots a_n 000 \dots} \quad (1)$$

avec $a_n \neq 0$ peut aussi s'écrire¹

$$x = \overline{0, a_1 a_2 \dots (a_n - 1) 999 \dots} \quad (2)$$

En effet

$$\sum_{i=n}^N \frac{9}{10^i} = 9 \sum_{i=n}^N \frac{1}{10^i} = 9 \frac{1}{10^n} \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{N-n+1}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10^{n-1}} \left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{N-n+1}\right)$$

donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=n}^N \frac{9}{10^i} = \frac{1}{10^{n-1}}$.

¹Le développement (1) s'appelle *développement décimal propre*. Le développement (2) s'appelle *développement décimal impropre*. Tous les réels admettent un développement décimal propre, les réels admettant les deux développements décimaux s'appellent les nombres décimaux. On note \mathbb{D} leur ensemble.

4. Supposons donc qu'il existe une bijection

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow [0; 1] \\ n &\mapsto x_n \end{aligned}$$

Notons a_{in} la i -ième décimale de x_n .

$$x_n = 0, \overline{a_{1n}a_{2n} \dots a_{nn} \dots}$$

on construit

$$y = 0, \overline{b_1b_2 \dots b_n \dots}$$

avec

$$\begin{cases} b_i = 1 & \text{si } a_{ii} \neq 1 \\ b_i = 2 & \text{si } a_{ii} = 1 \end{cases}$$

c'est un développement décimal propre de $y \in]0; 1[$.

Il n'existe pas $p \in \mathbb{N}$ tel que $y = x_p$ car $b_n \neq a_{pp}$, donc f n'est pas surjective. Contradiction avec l'hypothèse f bijective.

Ainsi $[0; 1]$ n'est pas dénombrable.

5. S'il existe une application bijective de \mathbb{N} dans \mathbb{R} alors cette application est surjective sur $[0; 1] \subset \mathbb{R}$ ce qui est impossible. Donc \mathbb{R} est non dénombrable.

6. L'idée est de reprendre la question 1 et de remplacer 10 par 3. Soit $u_N = \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{3^n}$. Comme $a_n \leq 2$ on a

$$\begin{aligned} u_N &\leq \sum_{n=1}^N \frac{2}{3^n} \\ &\leq 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{3^n} \\ &\leq 2 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{N+1}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &\leq 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{N+1} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

D'autre part $u_{N+1} - u_N = \frac{a_{N+1}}{3^{N+1}} \geq 0$ donc (u_n) est croissante et majorée, ainsi elle est convergente. Comme $0 \leq u_N \leq 1$ on a $0 \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} u_N \leq 1$. Ainsi (u_N) converge vers un réel x de $[0; 1]$.

7. Réciproquement soit $x \in [0; 1]$. Si $x < 1$ il suffit de poser a_n égale au n -ième chiffre apparaissant dans le développement de x en base 3 que l'on construit par récurrence

$$\begin{cases} a_1 = E(3x) \\ a_i = E(3^i x - \sum_{j=1}^{i-1} a_j 3^{i-j}) \text{ pour } i \geq 2 \end{cases}$$

Si $x = 1$ on pose $a_n = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ en effet

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{2}{3^n} = 1$$

8. Le développement décimale n'est pas nécessairement unique. Par exemple $\frac{1}{3} = \overline{0,1}^3$ peut également s'écrire $x = 0,0222\dots$. Plus généralement

$$x = \overline{0, a_1 a_2 \dots a_n 000 \dots} \quad (3)$$

avec $a_n \neq 0$ peut aussi s'écrire²

$$x = \overline{0, a_1 a_2 \dots (a_n - 1) 222 \dots} \quad (4)$$

En effet

$$\sum_{i=n}^N \frac{2}{3^i} = 2 \sum_{i=n}^N \frac{1}{3^i} = 2 \frac{1}{3^n} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{N-n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3^{n-1}} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{N-n+1}\right)$$

donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=n}^N \frac{2}{3^i} = \frac{1}{3^{n-1}}$.

Exercice II

1. L'ensemble K_i est la réunion de 2^i intervalles disjoints de longueur $\frac{1}{3^i}$. Notons $F_{i,0}, \dots, F_{i,2^i-1}$ ces intervalles. On a par exemple

$$\begin{aligned} F_{0,0} &= [0; 1] \\ F_{1,0} &= \left[0; \frac{1}{3}\right] & F_{1,1} &= \left[\frac{2}{3}; 1\right] \\ F_{2,0} &= \left[0; \frac{1}{9}\right] & F_{2,1} &= \left[\frac{2}{9}; \frac{1}{3}\right] & F_{2,2} &= \left[\frac{2}{3}; \frac{7}{9}\right] & F_{2,3} &= \left[\frac{8}{9}; 1\right] \end{aligned}$$

Supposons avoir fait la construction à l'étape i et notons

$$F_{i,j} = [a_{i,j}, b_{i,j}]$$

on a $b_{i,j} = a_{i,j} + \frac{1}{3^i}$. A l'étape $i+1$ l'intervalle $F_{i,j}$ sera remplacé par les intervalles $F_{i+1,2j}$ et $F_{i+1,2j+1}$ avec

$$\begin{aligned} F_{i+1,2j} &= \left[a_{i,j}, a_{i,j} + \frac{1}{3^{i+1}}\right] \\ F_{i+1,2j+1} &= \left[a_{i,j} + \frac{2}{3^{i+1}}, a_{i,j} + \frac{1}{3^i}\right] \end{aligned}$$

ainsi définissons $(a_{i,j})_{i,j}$ par

$$\begin{cases} a_{0,j} &= 0 & \forall j \in \mathbb{N} \\ a_{i+1,2j} &= a_{i,j} & \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ a_{i+1,2j+1} &= a_{i,j} + \frac{1}{3^{i+1}} & \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2 \end{cases}$$

ceci définit des nombres $a_{i,j}$ pour tout entier i et pour tout entier $j < 2^i$. L'ensemble

$$K_i = \bigcup_{j=0}^{2^i-1} F_{i,j}$$

est bien défini. De plus $K_i \subset K_{i-1}$ pour tout entier i non nul. On obtient l'ensemble triadique de Cantor avec

$$K = \bigcap_{i=0}^{+\infty} K_i$$

²Le développement (3) s'appelle *développement ternaire propre*. Le développement (4) s'appelle *développement ternaire impropre*.

2. Les éléments de K_1 sont ceux qui s'écrivent

$$\overline{0,0\dots}^3 \text{ ou } \overline{0,1\dots}^3$$

ceux de K_2 sont ceux qui s'écrivent

$$\overline{0,00\dots}^3 \text{ ou } \overline{0,01\dots}^3 \text{ ou } \overline{0,10\dots}^3 \text{ ou } \overline{0,11\dots}^3$$

pour montrer que les réels de K_i sont ceux dont un développement ternaire ne contient que des 0 et des 1 jusqu'à la i -ième position incluse on procède par récurrence. Soit P_i cette proposition. Alors

- P_1 est vrai
- supposons P_i vrai. Soit $x \in K_{i+1}$ alors

$$x = \overline{0, a_1 a_2 \dots a_i a_{i+1} \dots}^3$$

donc

$$3x = \overline{a_1, a_2 \dots a_i a_{i+1} \dots}^3 = a_1 + \overline{0, a_2 \dots a_i a_{i+1} \dots}^3$$

par construction de K on a $\overline{0, a_2 \dots a_i a_{i+1} \dots}^3 \in K_i$ donc pour tout entier p compris entre 2 et $i+1$ on a $a_p \in \{0; 1\}$. On a aussi $a_1 = 0$ donc P_{i+1} est vrai.

En conséquence les éléments de K sont ceux dont un développement ternaire ne contient que des 0 et des 1.

3. Soit ψ l'application suivante

$$\begin{aligned} K &\longrightarrow [0; 1] \\ x = \overline{0, a_1 a_2 \dots}^3 &\longmapsto \sum_{p \geq 1} \frac{a_p/2}{2^p} \end{aligned}$$

$a_p/2 \in \{0; 1\}$ puisque $a_p \in \{0; 2\}$, l'image de x est un réel donné par son développement binaire. Cette application est bien surjective car tout nombre de $[0; 1]$ admet un développement binaire.

Selon la question 4 de l'exercice I, l'intervalle $[0; 1]$ n'est pas dénombrable donc K ne l'est pas non plus. En effet si K l'était on pourrait numéroter ses éléments et par la même les éléments de $[0; 1]$ en choisissant comme numéro l'un des numéros de l'image réciproque par ψ .