Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2000-2001
CS 103 – Analyse I — F 01 – Semestre 1

Devoir à rendre le 30/3/2001

Développement décimal et ternaire

Exercice I

1. Soit (a_n) une suite d'entiers dans $[0;9]$, montrer que $\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{10^n}$ converge vers un réel x de $[0;1]$. Dans la suite on appellera *développement décimal* de x la suite des (a_n), et on notera $x=\overline{0,a_1a_2a_3\ldots}$

2. Réciproquement, soit $x\in[0;1]$. Montrer qu'il existe une suite d'entiers (a_n) dans $[0;9]$ telle que $x=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{10^n}$.

3. Pour $x\in[0;1]$, cette suite est-elle toujours unique ?

4. Démontrer que $[0;1]$ n'est pas dénombrable (Indication : supposer qu'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ dans $[0,1]$ et construire un réel de $[0,1]$ qui n'est l'image d'aucun entier.)

5. En déduire que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

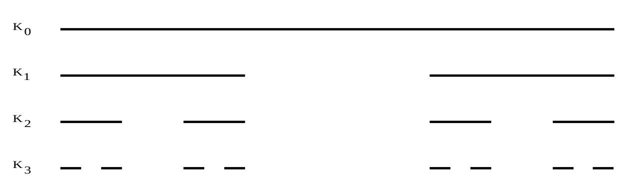
6. Soit (a_n) une suite d'éléments de $\{0;1;2\}$, montrer que $\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{3^n}$ converge vers un réel x de $[0;1]$. Dans la suite on appellera *développement ternaire* de x la suite des (a_n), et on notera $x=\overline{0,a_1a_2a_3\ldots}^{3}$.

7. Réciproquement, soit $x\in[0;1]$. Montrer qu'il existe une suite d'entiers (a_n) avec $a_n\in\{0;1;2\}$ et $x=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{3^n}$.

8. Pour $x\in[0;1]$, cette suite est-elle toujours unique ?

Exercice II

On considére le procédé de construction suivant : on part de l'intervalle $K_0=[0;1]$, on le divise en trois intervalles égaux et on retire l'intervalle central ouvert (c'est-à-dire l'intervalle $]\frac{1}{3};\frac{2}{3}[$). Il reste un ensemble K_1 constitué de 2 intervalles fermés de longueur $\frac{1}{3}$. Pour chacun de ces deux intervalles on réitère le processus. Cela donne 4 intervalles fermés de longueurs $\frac{1}{9}$ (noté K_2). En continuant ce processus indéfiniment $(K_3,K_4,\ldots)$ on obtient *l'ensemble triadique de Cantor K*.



1. Donner une définition rigoureuse de K.

2. Démontrer que K est consitué exactement des $x\in[0;1]$ dont un développement ternaire ne comporte que des 0 et des 2.

3. Montrer que K n'est pas dénombrable (indication : trouver une surjection de K dans $[0;1]$).