Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

Année 2000-2001
F 01 – Semestre 1

Feuille d'exercices 8

Compacité

Exercice I

Soit $A \subset \mathbb{R}$

1. Montrer que (A^*, A') forme une partition de $\overline{A}$. C'est-à-dire

$$\begin{cases} A^* \cup A' = \overline{A} \\ A^* \cap A' = \emptyset \end{cases}$$

2. Montrer que $A^* \subset A$

3. Montrer que $\overline{A} \setminus A \subset A'$

4. Si A est compact, $\overline{A}$, $\mathring{A}$, A', A^*, ∂A le sont-ils ?

Exercice II

Pour chacun des ensembles A suivants, et des recouvrements $(\Omega_i)_{i \in I}$ dites s'il est possible d'extraire un sous-recouvrement fini. Comparez avec le théorème de Borel-Lebesgue[1].

1. $A =]0, 1[$, $\Omega_i =]\frac{1}{i}, 1 - \frac{1}{i}[$, $I = \mathbb{N}^*$

2. $A =]0, 1[$, $\Omega_i =]\frac{1}{i}, 1 - \frac{1}{i}[$, $I = [1, +\infty[$

3. $A = [0, 1]$, $\Omega_i =] - \frac{1}{i}, 1 + \frac{1}{i}[$, $I = \mathbb{N}^*$

4. $A = [0, +\infty[$, $\Omega_i =]0, i[$, $I = \mathbb{N}^*$

5. $A = [0, 10^9]$, $\Omega_i =]0, i[$, $I = \mathbb{N}^*$

6. $A = [0, 10^9[$, $\Omega_i =]0, i[$, $I = \mathbb{N}^*$

[1] Henri Lebesgue, mathématicien français, de la fin du XIXe siècle et du début du XXe siècle. Il est en particulier connu pour la généralisation la notion dintégrale qui porte son nom.

Henri Léon Lebesgue (1875–1941)

Exercice III

Une suite d'éléments d'un ensemble sans point d'accumulation peut-elle être convergente ?

Exercice IV

Montrer que si $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de compacts non vides alors

$$\cap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$$

Donner un exemple.

Exercice V

1. L'ensemble des termes d'une suite convergente admet-il toujours au moins un point d'accumulation ?

2. Sinon quelle(s) conditions faut-il ajouter ? Si oui, est-ce que ce point d'accumulation est necessairement la limite de la suite ?

Exercice VI

On considère l'ensemble

$$E = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

1. Peut-on trouver un recouvrement de E par des ouverts, dont on ne peut pas extraire un sous-recouvrement fini ?

2. L'ensemble E est-il compact ? Peut-on déduire la réponse à cette question, de la réponse à la question précédente ?