Interrogation du 16/03/2010

Corrigé

Exercice I

1. Considérons

$$x(t) = \frac{KC}{C + (K - C)\exp(-\lambda t)}$$

Nous remarquons que $K - C > 0$ et $C > 0$ entraine qu'il n'y a pas de problème de définition de la fonction $t \mapsto x(t)$ sur $\mathbb{R}$ et, *a fortiori*, pas de problème de définition sur $[0, +\infty[$. On a

- $x(0) = \frac{KC}{C+(K-C)}$ donc $x(0) = C$
- La fonction x est dérivable sur $[0, +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables et on a

$$\begin{aligned}
x'(t) &= -\frac{KC(K-C)(-\lambda)\exp(-\lambda t)}{(C + (K-C)\exp(-\lambda t))^2} \\
&= \lambda \frac{KC}{C + (K-C)\exp(-\lambda t)} \frac{(K-C)\exp(-\lambda t)}{C + (K-C)\exp(-\lambda t)} \\
&= \lambda x(t) \left[\frac{C + (K-C)\exp(-\lambda t)}{C + (K-C)\exp(-\lambda t)} - \frac{C}{C + (K-C)\exp(-\lambda t)}\right] \\
&= \lambda x(t) \left[1 - \frac{1}{K} \frac{KC}{C + (K-C)\exp(-\lambda t)}\right] \\
&= \lambda x(t) \left[1 - \frac{x(t)}{K}\right]
\end{aligned}$$

par suite, la fonction x satisfait bien l'équation différentielle annoncée.

2. Notons $\tau \in \mathbb{R}$ le taux de reproduction. Pour $h > 0$, on a $x(t+h) = x(t) + \tau h x(t)$ ce qui conduit, après réorganisation des termes et en faisant tendre h vers 0, à

$$x'(t) = \tau x(t)$$

Le taux de reproduction τ est supposé proportionnel à $K - x(t)$ donc il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $\tau = c(K - x(t))$. On en déduit que

$$x'(t) = c(K - x(t))x(t)$$

Notons $\lambda = cK$, on a alors

$$x'(t) = \lambda x(t) \left[1 - \frac{x(t)}{K}\right]$$

ce qui modélise l'évolution de la masse de poisson en fonction du temps t.

3. En vertu de la question 1, on a

$$x(t) = \frac{Kx(0)}{x(0) + (K - x(0))\exp(-\lambda t)}$$

Notons $A = Kx(0) > 0$, $B = K - x(0) > 0$ et $C = x(0) > 0$, on s'interesse à l'allure de la courbe représentative de x. On a

$$x(t) = \frac{A}{C + B\exp(-\lambda t)}$$

donc

$$x'(t) = \lambda \frac{AB}{(C + B\exp(-\lambda t))^2}$$

ainsi, trois cas se présentent.

$\lambda > 0$. On a $\forall t \geq 0$, $x'(t) > 0$ et $\lim_{t\to+\infty} x(t) = K$. Nous sommes dans le cas de la figure 1.

$\lambda = 0$. On a $\forall t \geq 0$, $x'(t) = 0$ et x constant égal à C. Nous sommes dans le cas de la figure 2.

$\lambda < 0$. On a $\forall t \geq 0$, $x'(t) < 0$ et $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$. Nous sommes dans le cas de la figure 3.

4. On a établit qu'en absence de pêche

$$x(t+h) = x(t) + \lambda h x(t)\left[1 - \frac{x(t)}{K}\right]$$

On suppose que le prélévement du à la pêche est proportionnel à l'intensité de la pêche et à la masse de poissons. Entre t et $t + h$, le prélévement est $hbx(t)$. Ainsi, en présence de pêche

$$x(t+h) = x(t) + \lambda h x(t)\left[1 - \frac{x(t)}{K}\right] - bhx(t)$$

donc

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \lambda x(t)\left[1 - \frac{x(t)}{K}\right] - bx(t)$$

en passant, à la limite, lorsque h tend vers 0, il vient

$$x'(t) = \lambda x(t)\left[1 - \frac{x(t)}{K}\right] - bx(t)$$

ce qui donne

$$x'(t) = \lambda x(t)\left[1 - \frac{x(t)}{K} - \frac{b}{\lambda}\right]$$

Pour que la masse x de poisson soit constante, il faut et il suffit que $x'(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$. Cela équivaut à

$$1 - \frac{x(t)}{K} - \frac{b}{\lambda} = 0 \tag{1}$$

5. La pêche réalisée est $bx(t)$ or, il résulte de (1) que

$$x(t) = K - \frac{K}{\lambda} b$$

ainsi la pêche réalisée est $F(b)$ où

$$F(b) = -\frac{K}{\lambda} b^2 + Kb$$

Cette fonction est polynomiale donc dérivable deux fois et

$$F'(b) = -2b\frac{K}{\lambda} + K$$

$$F''(b) = -2\frac{K}{\lambda}$$

On a $F'(b) = 0$ équivaut à $b = \frac{\lambda}{2}$. Comme la dérivée seconde est négative, on est bien en présence d'un maximum. Le régulateur à donc intéret à imposer une intensité de pêche $b = \frac{\lambda}{2}$.

Imposer $b = \frac{\lambda}{2}$ dans (1) conduit àvoir x constant égal à $\frac{K}{2}$. La pêche doit donc commencer au moment où la masse de poisson a atteint cette valeur.

Exercice II

En préliminaire à notre étude, remarquons que dès que deux points du nuage n'ont pas la même abcisse, on la moyenne des carrés est différent du carré de la moyenne.

Soit f l'application définie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - ax_i - b)^2$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a}(a,b) &= -2\sum_{i=1}^{N} x_i(y_i - ax_i - b) \\ \frac{\partial f}{\partial b}(a,b) &= -2\sum_{i=1}^{N} (y_i - ax_i - b) \end{aligned}$$

Ces deux dérivées partielles s'annulent si et seulement si

$$\begin{cases} -2\overline{xy} + 2a\overline{x^2} + 2b\overline{x} = 0 \\ -2\overline{y} + 2a\overline{x} + 2b = 0 \end{cases}$$

si et seulement si

$$M \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = V$$

avec

$$M = \begin{bmatrix} \overline{x^2} & \overline{x} \\ \overline{x} & 1 \end{bmatrix} \text{ et } V = \begin{bmatrix} \overline{xy} \\ \overline{y} \end{bmatrix}$$