Pôle Universitaire Léonard de Vinci
ESI CS 1402 – Introduction au Calcul Scientifique

S4 – Année 2009-2010
Promotion ESILV 2013

Interrogation du 16/03/2010

Durée de l'épreuve : 1 heure 15

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les deux exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Les réponses doivent être justifiées. On pourra admettre le résultat d'une question pour passer à la question suivante. Le sujet est recto-verso.

Exercice I (15 points)

1. Soit λ un réel, C et K deux réels strictement positifs avec $C < K$. Montrer que

$$t \mapsto \frac{KC}{C + (K - C)\exp(-\lambda t)}$$

est solution de l'équation différentielle

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & \lambda\, x(t)\, \left[1 - \frac{x(t)}{K}\right] \\ x(0) & = & C \end{array}\right.$$

2. On se propose d'étudier l'évolution, au cours du temps, de la population d'une espèce animale, par exemple une espèce de poissons. Notons $x(t)$ la masse de poissons à l'instant t.

Dans le cours nous avions supposé que les naissances entre t et $t+h$ étaient $\alpha h x(t)$ et que les décès entre t et $t+h$ étaient $\beta h x(t)$ où α et β sont des réels constants positifs. Cela a conduit à un taux de reproduction égal à $\alpha - \beta$.

Nous souhaitons affiner ce modèle en supposant que le taux de reproduction est proportionnel à la quantité de ressources disponibles dans le milieu. Cette quantité de ressources, au temps t, sera supposée être proportionelle à $K - x(t)$ (on supposera que la masse de poissons est toujours inférieure à K).

Donner une équation différentielle modélisant l'évolution de la quantité de poisson.

3. Montrer que l'évolution de la masse de poissons, selon ce modèle, a l'allure de l'une des courbes représentées ci-dessous. Indiquer quels sont le(s) paramètre(s) qui donnent chacune des courbes ci-dessous.

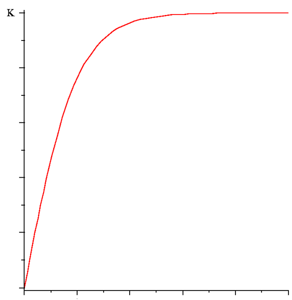

Figure 1

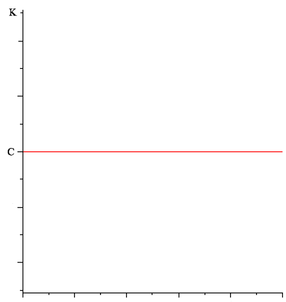

Figure 2

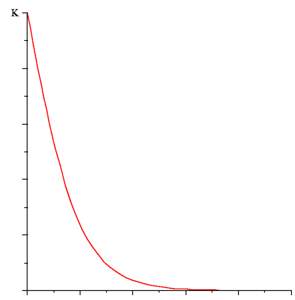

Figure 3

Dans les questions suivantes, on supposera être dans les conditions qui conduisent à la figure 1.

4. Dans le cadre d'une pêche durable, le gouvernement souhaite réguler la pêche afin que la masse de poissons soit constante.

Soit b l'intensité de la pêche (une constante proportionnelle au nombre de chalutiers et à leur taille). Montrer qu'une l'on peut modéliser l'évolution du nombre de poissons par

$$x'(t) = \lambda \, x(t) \, \left[1 - \frac{x(t)}{K} - \frac{b}{\lambda}\right]$$

En déduire une relation entre $x(t)$, b, λ et K qui permette de garantir que la masse de poissons est constante.

5. Le régulateur souhaite que la masse de poissons soit constante et permettre que la pêche soit maximale. Determiner le b optimal en fonction de K et/ou λ. A quel moment doit commencer la pêche ?

Exercice II (5 points)

Soit N un entier naturel non nul et

$$\mathcal{N} = \{(x_i, y_i), \; i \in [1, N] \cap \mathbb{N}\}$$

On suppose que tous les points de $\mathcal{N}$ ne sont pas alignés sur une droite verticale. Notons

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \\
\overline{y} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \\
\overline{x^2} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \\
\overline{xy} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i
\end{aligned}$$

Redémontrer que l'équation de la droite des moindres carrés $y = ax + b$ s'obtient en résolvant un système

$$M \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = V$$

où M et V sont respetivement une matrice et un vecteur que l'on déterminera. On ne demande pas de résoudre le système.