Pôle Universitaire Léonard de Vinci
ESI CS 1402 – Introduction au Calcul Scientifique

S4 – Année 2009-2010
Promotion ESILV 2013

Examen du 12/04/2010

Corrigé

Exercice I

1. On discrétise l'intervalle $[t, t+h]$ en N intervalles ($N \in \mathbb{N}^*$) de longueur $\frac{h}{N}$. Soit i un entier compris entre 0 et N. Si on approxime a par une fonction en escaliers constante entre $t + i\frac{h}{N}$ et $t + (i+1)\frac{h}{N}$. La quantité d'alcool ingérée entre $t + i\frac{h}{N}$ et $t + (i+1)\frac{h}{N}$ est

$$\frac{h}{N} a\left(t + i\frac{h}{N}\right)$$

la quantité totale entre t et $t+h$ est donc

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{h}{N} a\left(t + i\frac{h}{N}\right)$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ et en utilisant la construction de l'intégrale de Riemann, on obtient

$$\int_t^{t+h} a(x)dx$$

2. Soit $h > 0$. La quantité d'alcool, en plus, dans l'appareil digestif entre t et $t+h$ est la quantité d'alcool avalée entre t et $t+h$, c'est-à-dire

$$\int_t^{t+h} a(x)dx$$

La quantité d'alcool, en moins, dans l'appareil digestif entre t et $t+h$ est la quantité d'alcool passant dans le sang entre t et $t+h$, c'est-à-dire

$$k_1 h d(t)$$

où $k_1 > 0$ est une constante de proportionalité. Ainsi

$$d(t+h) = d(t) + \int_t^{t+h} a(x)dx - k_1 h d(t)$$

donc

$$\frac{d(t+h) - d(t)}{h} = \frac{A(t+h) - A(t)}{h} - k_1 d(t)$$

Lorsque h tend vers 0, il vient

$$d'(t) = a(t) - k_1 d(t) \tag{1}$$

3. Les solutions générales de l'équations sans second membre $d'(t) = -k_1 d(t)$ sont

$$C\exp(-k_1 t)$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.

Pour trouver une solution particulère de l'équation avec second membre (1), on cherche cette solution sous la forme $d(t) = C(t)\exp(-k_1 t)$ comme le suggère la méthode de variation de la constante. On a $d'(t) = C'(t)\exp(-k_1 t) - k_1 C(t)\exp(-k_1 t)$ ainsi, si d est solution on (1), on a

$$C'(t)\exp(-k_1 t) - k_1 C(t)\exp(-k_1 t) = a(t) - k_1 C(t)\exp(-k_1 t)$$

ainsi $C'(t)\exp(-k_1 t) = a(t)$ donc

$$C'(t) = \exp(k_1 t)a(t)$$

ce qui donne $C' = F'$. Nous choisirons $C = F$. Une solution particulière est

$$F(t)\exp(-k_1 t)$$

Les solutions générales de l'équations avec second membre sont donc

$$d(t) = C\exp(-k_1 t) + F(t)\exp(-k_1 t)$$

Or la personne est sobre à $t = 0$ donc $0 = d(0) = C + F(0)$. Comme F s'annule en 0, par construction, on a $C = 0$. Par suite

$$d(t) = F(t)\exp(-k_1 t)$$

4. Soit $h > 0$. Observons la quantité d'alcool dans le sang entre t et $t + h$. La quantité d'alcool, en plus, dans le sang est la quantité d'alcool provenant de l'appareil digstif, c'est-à-dire

$$k_1 h d(t)$$

La quantité d'alcool, en moins, dans le sang est la quantité d'alcool métabolisée par le foie, c'est-à-dire

$$k_2 h \frac{s(t)}{s(t) + M}$$

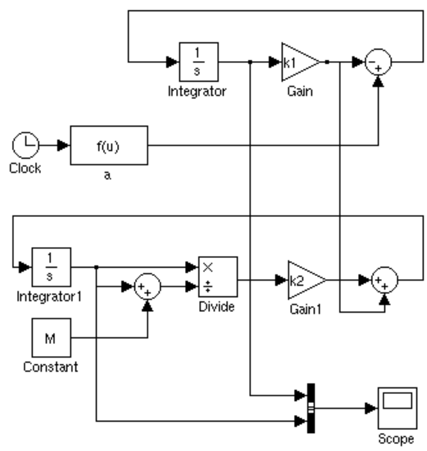
où $k_2 > 0$ est une constante de proportionalité. Ainsi

$$s(t+h) = s(t) + k_1 h d(t) - k_2 h \frac{s(t)}{s(t) + M}$$

En faisant passer h dans le membre de gauche et en faisant tendre h vers 0, il vient

$$s'(t) = k_1 d(t) - k_2 \frac{s(t)}{s(t) + M}$$

5. On propose le schéma Simulink suivant



Exercice II

1. On considère trois compartiments $P_1(t)$, $P_2(t)$ et $N(t)$ représentant respectivement la population de prédateurs 1, de prédateurs 2 et de proies. On déduit des hypothèses que

$$P_1(t+h) = P_1(t) + a_1 h P_1(t) N(t) - b_1 h P_1(t)$$

En faisant passer h dans le membre de gauche et en faisant tendre h vers 0, il vient

$$P_1'(t) = a_1 P_1(t) N(t) - b_1 P_1(t)$$

de manière analogue on a

$$P_2'(t) = a_2 P_2(t) N(t) - b_2 P_2(t)$$

En notant $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ deux constantes, on a de manière analogue

$$N'(t) = \alpha N(t) - \beta N(t)[P_1(t) + P_2(t)]$$

Il vient finalement

$$\begin{cases} P_1'(t) = P_1(t)[a_1 N(t) - b_1] \\ P_2'(t) = P_2(t)[a_2 N(t) - b_2] \\ N'(t) = N(t)[\alpha - \beta(P_1(t) + P_2(t))] \end{cases}$$

2. Une condition nécessaire pour que toutes les espèces soient à populations constantes est que les espèces de prédateurs le soient, ce qui nécessite $P_1' = 0$ et $P_2' = 0$. Comme P_1 et P_2 ne s'annulent pas, il faut donc que

$$\begin{cases} a_1 N(t) - b_1 = 0 \\ a_2 N(t) - b_2 = 0 \end{cases}$$

Il faut donc $N(t) = \frac{b_1}{a_1}$ et $N(t) = \frac{b_2}{a_2}$. Il faut donc

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} \tag{2}$$

3. La condition (2) et $N = \frac{b_1}{a_1}$ entraine $P_1' = 0$ et $P_2' = 0$ donc les populations de prédateurs sont constantes. Pour que toutes les espèces soient de population constante, il suffit que les proies le soient également, c'est-à-dire que

$$\alpha - \beta(P_1(t) + P_2(t)) = 0$$

Comme P_1 et P_2 sont constantes, cela revient à

$$\alpha = \beta(P_1(0) + P_2(0))$$

qui, sous l'hypothèse (2) et $N = \frac{b_1}{a_1}$, est une condition suffisante pour avoir la constance des trois espèces.

Exercice III

On choisi un nombre d'intervalles de discrétisations N_x, par exemple égal à 100, et un nombre d'intervalles de discrétisations N_t, par exemple égal à 1000. On note

$$h_x = \frac{\pi}{N_x} \qquad \text{et} \qquad h_t = \frac{1}{N_t}$$

On discrétise la condition initiale en considérant un vecteur de $\mathbb{R}^{N_x+1}$ dont la i-ème composante est $\sin(ih_x)$ (avec i un entier compris entre 0 et N_x). En utilisant les différences finies pour approximer les dérivées partielles, il vient l'algorithme suivant (écrit en Maple, mais qui pourrait être écrit dans n'importe quel autre langage)

```
Nx:=100;
Nt:=1000;
hx:=Pi/Nx;
ht:=1/Nt;

for i from 0 to Nx do
   u[i,0] := sin(i*hx);
od:

for j from 0 to Nt do
   u[0,j+1] := 0;
   for i from 1 to Nx do
      u[i,j+1]:=u[i,j]+3*ht/hx*(u[i,j]-u[i-1,j]);
   od:
od:
```