Pôle Universitaire Léonard de Vinci
ESI CS 1402 – Introduction au Calcul Scientifique

S4 – Année 2009-2010
Promotion ESILV 2013

Examen du 12/04/2010

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les trois exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Les réponses doivent être justifiées. On pourra admettre le résultat d'une question pour passer à la question suivante. Le sujet est recto-verso.

Exercice I (10 points)

On se propose de modéliser la quantité d'alcool dans le sang d'une personne. Lorsque la soirée commence à $t = 0$, la personne est parfaitement sobre (sa quantité d'alcool dans le sang et dans l'appareil digestif est nulle). On note $a(t)$ la quantité (instantanée) d'alcool bue par la personne en t. On suppose cette fonction continue par morceaux. Au besoin, on pourra noter A une primitive de a.

1. Soit $t \geq 0$ et $h > 0$. Expliquer heuristiquement pourquoi que la quantité totale d'alcool avalée entre t et $t + h$ est

$$\int_t^{t+h} a(x)dx$$

2. L'alcool passe de l'appareil digestif dans le sang en quantité proportionnelle à la quantité d'alcool dans l'appareil digestif. On note $d(t)$ la quantité d'alcool dans l'appareil digestif. Montrer qu'il existe $k_1 \in]0, +\infty[$ tel que

$$d'(t) = a(t) - k_1 d(t) \tag{1}$$

3. On note F la primitive de $t \mapsto \exp(k_1 t)a(t)$ qui s'annule en 0. Résoudre (1).

4. L'alcool est essentiellement métabolisé par le foie. La quantité métabolisée n'est pas proportionnelle à la quantité d'alcool dans le sang, mais à

$$\frac{X}{X + M}$$

où X est la quantité d'alcool dans le sang et M est une constante. Montrer que la quantité d'alcool $s(t)$ dans le sang est

$$s(t) = k_1 d(t) - k_2 \frac{s(t)}{s(t) + M}$$

5. On vous demande de trouver numériquement la quantité d'alcool dans le sang au temps t. A votre convenance, vous pouvez

- faire un schéma Simulink
- **OU** faire un programme basé sur la méthode d'Euler en Maple, Matlab, Java ou Excel (dans ce derniere cas on précisera le contenu de chaque cellule et les copier-coller éventuels)

Il est recommandé de ne pas tenter de faire plusieurs méthodes, une erreur dans l'une d'entre-elles entrainant la note minimale entre ces méthodes.

Exercice II (6 points)

On considère deux prédateurs (1 et 2) qui mangent la même proie. Les prédateurs ne se mangent pas entre eux. On suppose que

- Le nombre de naissances des proies est proportionnel à la population des proies.
- Le nombre de décès des proies est propotionnel au produit de la population des proies par la population totale des prédateurs.
- Le nombre de naissances du prédateur $i \in \{1, 2\}$ est proportionnel au produit de la population du prédateur i et de la ressource disponible (la popuplation des proies). On notera a_i cette constante.
- Le nombre de décès du prédateur $i \in \{1, 2\}$ est proportionnel à la population de prédateurs i. On notera b_i cette constante.

1. Ecrire le modèle compartimental et donner les équations différentielles.

2. Montrer qu'une condition nécessaire, pour que la population de chaque espèce soit constante, est

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} \tag{2}$$

3. On suppose (2) satisfait. Trouver une condition suffisante pour que la population de chaque espèce soit constante.

Exercice III (4 points)

La modélisation d'un problème de transport conduit à établir que l'on a u solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) \; + \; 3\,\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) \; = \; 0 & \text{pour tout} \quad (x,t) \in [0,\pi] \times [0,1] \\ u(x,0) = \sin x & \text{pour tout} \quad x \in [0,\pi] \\ u(0,t) = 0 & \text{pour tout} \quad t \in [0,1] \end{cases}$$

On suppose que u existe et est unique. Donner un algorithme permettant de trouver $u(x,1)$ où x prend des valeurs discrètes dans $[0,\pi]$.